Olimpiada Nacional de Matemática 2016

Tercera Fase - Nivel 2

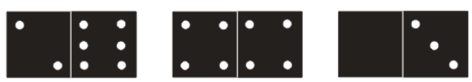
Soluciones

Problema 1. Determinar la suma de los dígitos del número

$$\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\frac{2^4}{2^3}+...+\frac{2^{2015}}{2^{2014}}+\frac{2^{2016}}{2^{2015}}$$

Solución: Veamos que cada término de la suma es igual a 2 ya que todos los 2015 términos son de la forma $\frac{2^n}{2^{n-1}}=2$ entonces la suma es igual a $\underbrace{2+2+2+...+2}_{2015}=2\cdot 2015=4030$ por lo que la respuesta es $4+0+3+0=7$.

Problema 2. El juego de dominó está formado por 28 piezas rectangulares distintas, cada una con dos partes, con cada parte de 0 a 6 puntos. Por ejemplo, vea tres de esas piezas:



¿Cuál es el número total de puntos entre todas las piezas?

Solución:

Solución 1:

Es fácil ver que la parte con 0 puntos aparece exactamente en 7 fichas, lo mismo ocurre con 1 punto que aparece exactamente en 7 fichas y lo mismo ocurre para todas las demás cantidades de puntos, todos aparecen en exactamente 7 fichas, pero cada cantidad aparece exactamente una vez en cada una de esas 7 fichas, excepto en una que tiene el mismo número repetido, entonces cada número aparecerá 8 veces en la suma que determina el total de puntos, es decir que la suma total es

$$\begin{aligned}\underbrace{1+1+...+1}_{8}+\underbrace{2+2+...+2}_{8}+...+\underbrace{6+6+...+6}_{8}&=1\cdot 8+2\cdot 8+...+6\cdot 8\\&=8(1+2+...+6)\\&=8\cdot\frac{6\cdot 7}{2}\\&=168\end{aligned}$$

Solución 2:

Vamos a proceder organizando todas las fichas de acuerdo al número que tengan por la derecha, además considerando que no se repitan fichas, de esta manera se tiene la siguiente organización:

- Con el 0 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 0,1,2,3,4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $0+1+2+3+4+5+6+7\cdot 0=21$ puntos.

- Con el 1 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 1,2,3,4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $1+2+3+4+5+6+6\cdot 1=27$ puntos.

- Con el 2 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 2,3,4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $2+3+4+5+6+5\cdot 2=30$ puntos.

- Con el 3 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 3,4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $3+4+5+6+4\cdot 3=30$ puntos.

- Con el 4 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $4+5+6+3\cdot 4=27$ puntos.

- Con el 5 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 5,6.
  Con estas fichas se tienen $5+6+2\cdot 5=21$ puntos.

- Con el 6 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 6.
  Con esta ficha se tienen $6+6=12$ puntos.

Por lo que en total se tienen $21+27+30+30+27+21+12=168$ puntos.

Solución 3:
Este problema también permitía una solución mecánica que consistía en realizar la lista de las 28 fichas, confirmando que no se repita alguna ni que falte alguna, posteriormente a esto se realizaba el conteo de los puntos que hay en total y se podía obtener sin problemas que hay en total 168 puntos, esta solución difiere con la anterior debido a que en la anterior se considera un orden que permite confirmar que no hayan repeticiones ni que falte alguna ficha.

Problema 3. El máximo común divisor de dos números es 60, y su producto es $\overline{7d00}$, donde d es un dígito. Hallar la suma de esos dos números.

Solución: Como el máximo común divisor de esos dos números es 60, entonces ambos son múltiplos de 60, y en consecuencia su producto es múltiplo de $60\times 60=3600$. Los múltiplos de 3600 que tienen cuatro dígitos son 3600 y 7200, luego, podemos concluir que $d=2$.
Ahora, si suponemos que los números son $60n$ y $60m$, como su producto es 7200, tenemos:

$$60n\times 60m=7200\to mn=2,$$

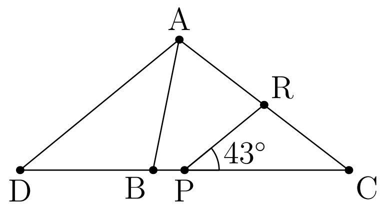
de donde tenemos que $\{m,n\}=\{1,2\}$. Es decir, los números buscados son 60 y 120. Nos piden la suma de esos números que es 180.

Problema 4. ¿Es posible que la suma de dos primos consecutivos sea el doble de otro primo?

Solución: Supongamos que existen p_1, p_2 y p_3 primos con p_1 y p_2 primos consecutivos y $p_1+p_2=2\cdot p_3$. Entonces se tiene que $p_3=\frac{p_1+p_2}{2}$, en otras palabras p_3 es el promedio de p_1 y p_2. Ya que p_1 y p_2 son distintos, el promedio de ellos está estrictamente entre ambos y debe ser primo. Sin embargo, p_1 y p_2 son primos consecutivos y por lo tanto no existe ningún primo entre ellos. Contradicción, por lo tanto no existe p_3 que cumpla.

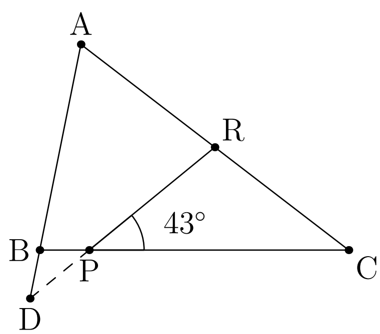
Problema 5. En el lado BC de un triángulo ABC se ubica un punto P de manera que $AB+BP=PC$. Sea R el punto medio de AC. Si la medida del ángulo RPC es 43°, hallar la medida del ángulo ABC.

Solución:
Solución 1:
Prolongamos el segmento PB, por el extremo B, hasta el punto D, de tal modo que $BD=BA$.



Según el dato, $AB + BP = PC$, de donde se obtiene que $DP = PC$.
Como R es punto medio de AC y P es punto medio de CD, entonces PR es base media del triángulo ADC, y en consecuencia PR es paralelo a AD y $\angle ADB = \angle RPC = 43^{\text{o}}$.
Por otro lado, el triángulo ABD es isósceles con$AB = BD$, entonces $\angle DAB = \angle ADB = 43^{\text{o}}$.
Finalmente $\angle ABC = \angle DAB + \angle ADB = 43^{\text{o}} + 43^{\text{o}} = 86^{\text{o}}$.

Solución 2:
Prolongamos el segmento AB, por el extremo B, hasta el punto D, de tal modo que $BD = BP$.



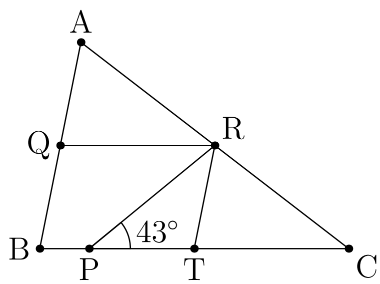
Ahora vamos a demostrar que los puntos D, P, R son colineales usando el Teorema de Menelao que indica que D, P, R son colineales si y sólo si

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CR}{AR} = 1$$

Pero como $AD = AB + BD = AB + BP = CP$, $CR = AR$ y $BP = BD$ entonces la expresión anterior sí es 1 ya que todos los factores del miembro izquierdo se cancelan, entonces ya se puede concluir que D, P, R son colineales, con lo que podemos obtener que $43^{\text{o}} = \angle CPR = \angle BPD$, y como el triángulo BDP es isósceles por lo que $BD = BP$ entonces $\angle BDP = \angle BPD$, entonces

$$\angle ABC = 180^{\text{o}} - \angle DBP = 180^{\text{o}} - (180^{\text{o}} - \angle BDP - \angle BPD) = \angle BDP + \angle BPD = 43^{\text{o}} + 43^{\text{o}} = 86^{\text{o}}$$

Solución 3:
Sean Q y T los puntos medios de los lados AB y BC.



Se tiene que QR es paralela media en ABC con $QR \parallel BC$, así mismo RT es paralela media en ABC con $RT \parallel AB$, entonces $BQRT$ es un paralelogramo, de donde $BQ = RT$ además $\angle ABC = \angle QRT$, así como también $43^{\text{o}} = \angle RPT = \angle PRQ$.
Por otro lado veamos que

$$\begin{aligned}
&BC = BP + CP\\
\Rightarrow &\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BP + \frac{1}{2}CP\\
\Rightarrow &BT = \frac{1}{2}BP + \frac{1}{2}CP\\
\Rightarrow &BT = \frac{1}{2}BP + \frac{1}{2}(AB + BP)\\
\Rightarrow &BT = BP + \frac{1}{2}AB\\
\Rightarrow &BP + PT = BP + \frac{1}{2}AB\\
\Rightarrow &PT = \frac{1}{2}AB\\
\Rightarrow &PT = BQ\\
\Rightarrow &PT = RT
\end{aligned}$$

Con lo que el triángulo PRT es isósceles, por lo que $43^{\text{o}} = \angle RPT = \angle PRT$, con esto ya se puede decir que $\angle QRT = 43^{\text{o}} + 43^{\text{o}} = 86^{\text{o}}$ por lo que se puede concluir que $\angle ABC = 86^{\text{o}}$.

Problema 6. Hay nueve sillas en una fila que serán ocupadas por seis estudiantes y tres profesores: Alfredo, Fernando y Julio. Estos tres profesores llegan antes que los seis estudiantes y deciden escoger sus sillas de tal forma que cada profesor se ubique entre dos estudiantes. ¿De cuántas maneras pueden Alfredo, Fernando y Julio escoger sus sillas?

Solución: Notemos que las sillas de los extremos deben ser ocupadas por estudiantes. Ésto implica que los profesores tienen 7 posibles sillas para escoger, y no pueden elegir dos adyacentes. Si numeramos 2,...,8 a estas 7 sillas, las posibilidades de sillas ocupadas por los profesores serán: (2,4,6) (2,4,7) (2,4,8) (2,5,7) (2,5,8) (2,6,8) (3,5,7) (3,5,8) (3,6,8) (4,6,8). En estas 10 configuraciones de sillas, los profesores pueden ordenarse de cualquier manera, es decir para cada configuración, hay 6 posibles ordenamientos de profesores. Por el principio de la multiplicación, hay $10(3!) = 60$ maneras en que los profesores se pueden sentar tal que cada profesor se ubique entre dos estudiantes.

Problema 7. Se tienen n números naturales consecutivos de cinco dígitos cada uno y tales que ninguno de ellos puede ser expresado como el producto de dos números naturales de tres dígitos. Hallar el mayor valor posible de n.

Solución: En primer lugar, probaremos que no es posible que $n \geq 100$. En efecto, si tuviéramos a 100 o mas números consecutivos, necesariamente alguno debe ser múltiplo de 100, sea $\overline{abc00}$ este número, luego, $\overline{abc00} = \overline{abc} \times 100$ es el producto de dos números de tres dígitos, lo cual no es posible.
Vamos a probar ahora que el mayor valor posible de n es 99. Por lo visto anteriormente, solo faltaría un ejemplo. Notemos que $100 \times 100 = 10000$ y $100 \times 101 = 10100$ son los menores números que se pueden expresar como el producto de dos números de tres dígitos. Luego, ninguno de los siguientes 99 números se puede expresar como el producto de dos números de 3 dígitos $10001, 10002, 10003, \ldots, 10097, 10098, 10099$.
Éste es el ejemplo que estábamos buscando.