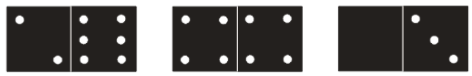
Olimpiada Nacional de Matemática 2016

Tercera Fase - Nivel 3

Viernes, 25 de noviembre de 2016

Problema 1. El juego de dominó está formado por 28 piezas rectangulares distintas, cada una con dos partes, con cada parte de 0 a 6 puntos. Por ejemplo, vea tres de esas piezas:



¿Cuál es el número total de puntos entre todas las piezas?

Problema 2. Los números a, b y c son enteros positivos tales que:

$$a^2 + \frac{1}{b} + c = 39$$
$$a^2 + \frac{1}{b} - c = 13$$

Calcular el valor de $a^2 - \dfrac{1}{b} + 2c$.

Problema 3. En el triángulo ABC la bisectriz del ángulo ABC intersecta al lado AC en el punto D, la bisectriz del ángulo BDC intersecta al lado BC en el punto E. Si la bisetriz del ángulo BED es perpendicular al lado AB, y además $\angle ACB = 26^{\circ}$, calcular $\angle ADE$.

Problema 4. Hay nueve sillas en una fila que serán ocupadas por seis estudiantes y tres profesores: Alfredo, Fernando y Julio. Estos tres profesores llegan antes que los seis estudiantes y deciden escoger sus sillas de tal forma que cada profesor se ubique entre dos estudiantes. ¿De cuántas maneras pueden Alfredo, Fernando y Julio escoger sus asientos?

Problema 5. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tales que $a + b + c = 1$ y $ab + bc + ca = \dfrac{1}{3}$. Hallar el valor de

$$\frac{7a}{b+1} + \frac{6b}{c+1} + \frac{3c}{a+1}$$

Problema 6. Se tienen n números naturales consecutivos de cinco dígitos cada uno y tales que ninguno de ellos puede ser expresado como el producto de dos números naturales de tres dígitos. Hallar el mayor valor posible de n.

Problema 7. Sea n un entero positivo y sea X un conjunto de $n + 2$ enteros, cada uno de ellos con valor absoluto menor o igual a n. Demostrar que existen tres números distintos $a, b, c \in X$ tales que $a + b = c$.

Tiempo de duración: 3 horas.
Cada problema vale 7 puntos.