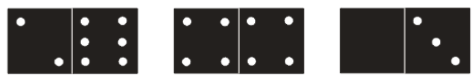
Olimpiada Nacional de Matemática 2016

Tercera Fase - Nivel 3

Soluciones

Problema 1. El juego de dominó está formado por 28 piezas rectangulares distintas, cada una con dos partes, con cada parte de 0 a 6 puntos. Por ejemplo, vea tres de esas piezas:



¿Cuál es el número total de puntos entre todas las piezas?

Solución:

Solución 1:

Es fácil ver que la parte con 0 puntos aparece exactamente en 7 fichas, lo mismo ocurre con 1 punto que aparece exactamente en 7 fichas y lo mismo ocurre para todas las demás cantidades de puntos, todos aparecen en exactamente 7 fichas, pero cada cantidad aparece exactamente una vez en cada una de esas 7 fichas, excepto en una que tiene el mismo número repetido, entonces cada número aparecerá 8 veces en la suma que determina el total de puntos, es decir que la suma total es

$$\begin{aligned}
\underbrace{1+1+...+1}_{8}+\underbrace{2+2+...+2}_{8}+...+\underbrace{6+6+...+6}_{8} &= 1\cdot 8+2\cdot 8+...+6\cdot 8\\
&= 8(1+2+...+6)\\
&= 8\cdot\frac{6\cdot 7}{2}\\
&= 168
\end{aligned}$$

Solución 2:

Vamos a proceder organizando todas las fichas de acuerdo al número que tengan por la derecha, además considerando que no se repitan fichas, de esta manera se tiene la siguiente organización:

- Con el 0 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 0,1,2,3,4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $0+1+2+3+4+5+6+7\cdot 0=21$ puntos.

- Con el 1 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 1,2,3,4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $1+2+3+4+5+6+6\cdot 1=27$ puntos.

- Con el 2 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 2,3,4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $2+3+4+5+6+5\cdot 2=30$ puntos.

- Con el 3 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 3,4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $3+4+5+6+4\cdot 3=30$ puntos.

- Con el 4 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 4,5,6.
  Con estas fichas se tienen $4+5+6+3\cdot 4=27$ puntos.

- Con el 5 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 5,6.
  Con estas fichas se tienen $5+6+2\cdot 5=21$ puntos.

- Con el 6 por la derecha, el de la izquierda puede ser: 6.
  Con esta ficha se tienen $6 + 6 = 12$ puntos.

Por lo que en total se tienen $21 + 27 + 30 + 30 + 27 + 21 + 12 = 168$ puntos.

Solución 3:
Este problema también permitía una solución mecánica que consistía en realizar la lista de las 28 fichas, confirmando que no se repita alguna ni que falte alguna, posteriormente a esto se realizaba el conteo de los puntos que hay en total y se podía obtener sin problemas que hay en total 168 puntos, esta solución difiere con la anterior debido a que en la anterior se considera un orden que permite confirmar que no hayan repeticiones ni que falte alguna ficha.

Problema 2. Los números a, b y c son enteros positivos tales que:

$$a^2 + \frac{1}{b} + c = 39$$
$$a^2 + \frac{1}{b} - c = 13$$

Calcular el valor de $a^2 - \frac{1}{b} + 2c$.

Solución: Como a y c son enteros entonces $a^2 + c$ tambien es entero, pero sabemos que $a^2 + \frac{1}{b} + c$ es entero, entonces $\frac{1}{b}$ tambien es enter. Como b es entero positivo y $\frac{1}{b}$ es entero, concluimos que $b = 1$. Luego, tenemos las ecuaciones:

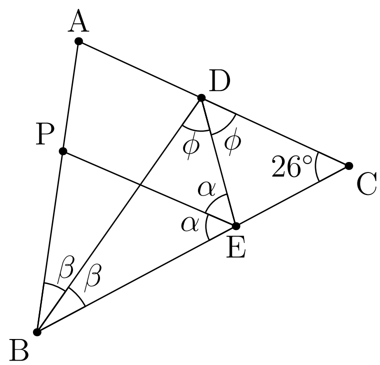
$$a^2 + c = 38$$
$$a^2 - c = 12$$

de donde $a^2 = 25$ y $c = 13$, luego, nos piden el valor de:

$$a^2 - \frac{1}{b} + 2c = 25 - 1 + 26 = 50.$$

Problema 3. En el triángulo ABC la bisectriz del ángulo ABC intersecta al lado AC en el punto D, la bisectriz del ángulo BDC intersecta al lado BC en el punto E. Si la bisetriz del ángulo BED es perpendicular al lado AB, y además $\angle ACB = 26^{\text{o}}$, calcular $\angle ADE$.

Solución: Sea P el punto de intersección entre la bisectriz de $\angle BED$ y AB, además $\angle ABD = \angle DBE = \beta$, $\angle BEP = \angle PED = \alpha$ y $\angle EDB = \angle EDC = \phi$.



En el triángulo DEC, notamos que $2\alpha = \phi + 26^{\text{o}}$, luego

$$\phi = 2\alpha - 26^{\text{o}}.$$

En el triángulo BDC

$$\beta = 180^{\text{o}} - (2\phi + 26^{\text{o}}) = 154^{\text{o}} - 2\phi,$$

y por lo tanto

$$\beta = 154^{\text{o}} - 2(2\alpha - 26^{\text{o}}) = 206^{\text{o}} - 4\alpha.$$

Como EP es perpendicular a AB, entonces $2\beta + \alpha = 90^{\text{o}}$, entonces

$$2(206^{\text{o}} - 4\alpha) + \alpha = 90^{\text{o}} \to \alpha = 46^{\text{o}}$$

de donde $\phi = 66^{\text{o}}$ y por lo tanto

$$\angle ADE = 180^{\text{o}} - \phi = 180^{\text{o}} - 66^{\text{o}} = 114^{\text{o}}$$

Problema 4. Hay nueve sillas en una fila que serán ocupadas por seis estudiantes y tres profesores: Alfredo, Fernando y Julio. Estos tres profesores llegan antes que los seis estudiantes y deciden escoger sus sillas de tal forma que cada profesor se ubique entre dos estudiantes. ¿De cuántas maneras pueden Alfredo, Fernando y Julio escoger sus asientos?

Solución: Notemos que las sillas de los extremos deben ser ocupadas por estudiantes. Ésto implica que los profesores tienen 7 posibles sillas para escoger, y no pueden elegir dos adyacentes. Si numeramos 2,...,8 a estas 7 sillas, las posibilidades de sillas ocupadas por los profesores serán: (2,4,6) (2,4,7) (2,4,8) (2,5,7) (2,5,8) (2,6,8) (3,5,7) (3,5,8) (3,6,8) (4,6,8). En estas 10 configuraciones de sillas, los profesores pueden ordenarse de cualquier manera, es decir para cada configuración, hay 6 posibles ordenamientos de profesores. Por el principio de la multiplicación, hay $10(3!) = 60$ maneras en que los profesores se pueden sentar tal que cada profesor se ubique entre dos estudiantes.

Problema 5. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tales que $a + b + c = 1$ y $ab + bc + ca = \dfrac{1}{3}$. Hallar el valor de

$$\frac{7a}{b+1} + \frac{6b}{c+1} + \frac{3c}{a+1}$$

Solución:
Solución 1:
Para relacionar los datos del problema, elevamos la primera ecuación al cuadrado, y obtenemos

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)^2 = 1^2 \\
&\Rightarrow (a+b+c)^2 = 3\left(\frac{1}{3}\right) \\
&\Rightarrow (a+b+c)^2 = 3(ab+bc+ca) \\
&\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = 3(ab+bc+ca) \\
&\Rightarrow a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca \\
&\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 = 2ab+2bc+2ca \\
&\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca = 0 \\
&\Rightarrow \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right) = 0 \\
&\Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0
\end{aligned}$$

y como a, b, c son números reales concluimos que $a = b = c$, luego reemplazando en la primera ecuación obtenemos

$$a = b = c = \frac{1}{3}$$

finalmente la expresión que se pide calcular es igual a

$$\frac{7 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{6 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}(7+6+3) = \frac{1}{4} \cdot 16 = 4$$

Solución 2:
Al igual que en la solución 1 llegamos a demostrar que

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

Pero por la Desigualdad de Reordenamiento se tiene que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

además se conoce que el caso de igualdad se cumple si y sólo si los términos son iguales, y como llegamos a que debe ocurrir la igualdad entonces $a = b = c$, pero como $a + b + c = 1$ entonces $a = b = c = \frac{1}{3}$, luego se concluye al igual que en la solución 1, que la respuesta es 4.

Problema 6. Se tienen n números naturales consecutivos de cinco dígitos cada uno y tales que ninguno de ellos puede ser expresado como el producto de dos números naturales de tres dígitos. Hallar el mayor valor posible de n.

Solución: En primer lugar, probaremos que no es posible que $n \geq 100$. En efecto, si tuviéramos a 100 o mas números consecutivos, necesariamente alguno debe ser múltiplo de 100, sea $\overline{abc00}$ este número, luego, $\overline{abc00} = \overline{abc} \times 100$ es el producto de dos números de tres dígitos, lo cual no es posible.
Vamos a probar ahora que el mayor valor posible de n es 99. Por lo visto anteriormente, solo faltaría un ejemplo. Notemos que $100 \times 100 = 10000$ y $100 \times 101 = 10100$ son los menores números que se pueden expresar como el producto de dos números de tres dígitos. Luego, ninguno de los siguientes 99 números se puede expresar como el producto de dos números de 3 dígitos $10001, 10002, 10003, \ldots, 10097, 10098, 10099$.
Éste es el ejemplo que estábamos buscando.

Problema 7. Sea n un entero positivo y sea X un conjunto de $n + 2$ enteros, cada uno de ellos con valor absoluto menor o igual a n. Demostrar que existen tres números distintos $a, b, c \in X$ tales que $a + b = c$.

Solución: Lo demostraremos usando inducción en n. Para $n = 1$, la única opción para X es el conjunto $\{-1, 0, 1\}$ y estos números cumplen que $(-1) + 1 = 0$. Supongamos que el problema es cierto para cierto entero $n = k - 1$. Demostraremos que es cierto para $n = k$ por contradicción. Es decir, supondremos que existe un conjunto X que no cumple para $n = k$. Si k está en X, a lo más uno de los números en cada conjunto $\{-k, 0\}, \{-k+1, 1\}, \ldots, \{-1, k-1\}$ puede estar en X, por lo que X tiene a lo mas $k+1$ enteros, lo cual es una contradicción y k no puede estar en X. De manera análoga podemos demostrar que $-k$ no está en X.
Luego, todos los elementos en X cumplen que su valor absoluto es a lo más $k-1$ y como son mas que $(k-1)+2$, por la hipótesis inductiva, podemos concluir que hay tres enteros a, b y c con $a + b = c$ y la inducción esta completa.