XVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ASIA-PACÍFICO
MARZO 2004

Tiempo permitido: 4 horas
No se permite el uso de calculadoras
Cada problema tiene un valor de 7 puntos

PROBLEMA 1:
Determinar todos los conjuntos finitos no vacíos S de enteros positivos que satisfacen

$$\frac{i+j}{(i,j)} \text{ es un elemento de } S \text{ para todos los } i,\ j \text{ que pertenecen a } S,$$

donde (i,j) es el máximo común divisor de i y j.

PROBLEMA 2:
Sea O el circuncentro y H el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC. Demostrar que el área de uno de los triángulos AOH, BOH y COH es igual a la suma de las áreas de los otros dos triángulos.

PROBLEMA 3:
Sea S un conjunto de 2004 puntos dados en el plano tal que, no existen 3 que sean colineales. Sea ℓ el conjunto de todas las rectas (extendidas indefinidamente en ambas direcciones) determinadas por pares de puntos del conjunto. Demostrar que es posible colorear los puntos de S con a lo sumo dos colores, tal que para dos puntos cualesquiera p, q de S, el número de rectas en ℓ que separan p de q es impar si y solo si p y q son del mismo color.
Nota: Una recta ℓ *separa* dos puntos p y q si p y q se encuentran en lados opuestos de ℓ con ninguno de los puntos en ℓ.

PROBLEMA 4:
Para un número real x, sea $\lfloor x \rfloor$ el mayor entero que es menor o igual a x. Demostrar que

$$\left\lfloor \frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right\rfloor$$

es par para todo entero positivo n.

PROBLEMA 5:
Demostrar que

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right) \geq 9(ab+bc+ca)$$

para todos los números reales a, b, c >0.

Descarga realizada de la página oficial de la Olimpiada Matemática Ecuatoriana (OMEC)
http://www.omec-mat.org