XVII OLIMPIADA MATEMÁTICA ASIA-PACÍFICO
MARZO 2005

Tiempo permitido: 4 horas
No se permite el uso de calculadoras
Cada problema tiene un valor de 7 puntos

PROBLEMA 1:
Demostrar que para todo real irracional a, existen números irracionales b y b' tales que $a+b$ y ab' son ambos racionales mientras que ab y $a+b'$ son ambos irracionales.

PROBLEMA 2:
Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc=8$. Demostrar que

$$\frac{a^2}{\sqrt{\left(1+a^3\right)\left(1+b^3\right)}}+\frac{b^2}{\sqrt{\left(1+b^3\right)\left(1+c^3\right)}}+\frac{c^2}{\sqrt{\left(1+c^3\right)\left(1+a^3\right)}}\geq\frac{4}{3}$$

PROBLEMA 3:
Demostrar que existe un triángulo que puede ser cortado en 2005 triángulos congruentes.

PROBLEMA 4:
En un pequeño pueblo, hay $n\times n$ casas indexadas por (i,j) para $1\leq i,j\leq n$ siendo $(1,1)$ la casa ubicada en la esquina superior izquierda, donde i y j son los índices de las filas y las columnas, respectivamente. En el tiempo 0, un incendio empieza en la casa indexada $(1,c)$, donde $c\leq\frac{n}{2}$. Durante cada subsecuente intervalo de tiempo $[t,t+1]$, los bomberos defienden una casa que aún no está incendiada mientras que el fuego se esparce a todos los *vecinos* de cada casa que estuvo incendiada en el tiempo t. Una vez que una casa es defendida, se mantiene así todo el tiempo. El proceso termina cuando el fuego ya no puede esparcirse. ¿A lo sumo cuántas casas pueden ser salvadas por los bomberos?
Una casa indexada por (i,j) es *vecina* de una casa indexada por (k,l) si $|i-k|+|j-l|=1$.

PROBLEMA 5:
En un triángulo ABC, los puntos M y N están en los lados AB y AC, respectivamente, tal que $MB=BC=CN$. Sea R y r el circunsradio y el insradio del triángulo ABC, respectivamente. Expresar $\frac{MN}{BC}$ en términos de R y r.