XVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ASIA-PACÍFICO
MARZO 2006

Tiempo permitido: 4 horas
No se permite el uso de calculadoras
Cada problema tiene un valor de 7 puntos

PROBLEMA 1:
Sea n un entero positivo. Hallar el mayor real no negativo $f(n)$ (dependiendiendo de n) con la siguiente propiedad: para todos los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ es un entero, existe i tal que $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geq f(n)$.

PROBLEMA 2:
Demostrar que todo entero positivo puede ser escrito como una suma finita de potencias enteras distintas de la razón áurea $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Aquí, una potencia entera de τ es de la forma τ^i, donde i es un entero (no necesariamente positivo).

PROBLEMA 3:
Sea $p \geq 5$ un primo y sea r el número de formas de colocar p fichas en un tablero de $p \times p$ de tal forma que no todas las fichas estén en la misma fila (pero todas las fichas pueden estar en la misma columna). Demostrar que r es divisible por p^5. Aquí, se debe asumir que todas las fichas son identicas.

PROBLEMA 4:
Sean A y B dos puntos distintos en una circunferencia dada O y sea P el punto medio del segmento AB. Sea O_1 la circunferencia tangente a la recta AB en P y tangente a la circunferencia O. Sea ℓ la recta tangente, diferente de la recta AB, a O_1 que pasa por A. Sea C el punto de intersección, diferente de A, de ℓ y O. Sea Q el punto medio de BC y sea O_2 la circunferencia tangente a la recta BC en Q y tangente a la recta AC. Demostrar que la circunferencia O_2 es tangente a la circunferencia O.

PROBLEMA 5:
En un circo, hay n payasos que se visten y se pintan usando una selección de 12 colores diferentes. Es necesario que cada payaso use al menos 5 colores distintos. Un día, el dueño del circo ordena que no hayan dos payasos que tengan el mismo conjunto de colores y que no más de 20 payasos usen un mismo color en particular. Hallar el máximo número n de payasos que pueden haber de tal manera que la orden del dueño sea posible de cumplir.