

XX OLIMPIADA MATEMÁTICA ASIA-PACÍFICO
MARZO 2008

Tiempo permitido: 4 horas
No se permite el uso de calculadoras
Cada problema tiene un valor de 7 puntos

PROBLEMA 1:

Sea ABC un triángulo con $\angle A < 60^\circ$. Sean X y Y puntos en los lados AB y AC , respectivamente, tales que $CA + AX = CB + BX$ y $BA + AY = BC + CY$. Sea P un punto en el plano tal que las rectas PX y PY son perpendiculares a AB y AC , respectivamente. Demostrar que $\angle BPC < 120^\circ$.

PROBLEMA 2:

Los estudiantes de una clase forman grupos, en los que cada uno tiene exactamente tres miembros, de tal manera que cualesquiera dos grupos distintos tienen a lo sumo un miembro en común. Demostrar que cuando la clase es de 46 estudiantes, existe un conjunto de 10 estudiantes dentro de los cuales no existe ningún grupo propiamente contenido.

PROBLEMA 3:

Sea Γ la circunferencia circunscrita del triángulo ABC . Una circunferencia que pasa por los puntos A y C corta a los lados BC y BA en D y E , respectivamente. Las rectas AD y CE intersectan nuevamente a Γ en G y H , respectivamente. Las rectas tangentes a Γ que pasan por A y C intersectan la recta DE en L y M , respectivamente. Demostrar que las rectas LH y MG se intersectan en Γ .

PROBLEMA 4:

Considere la función $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, donde \mathbb{N}_0 es el conjunto de todos los enteros no negativos, definida por las siguientes condiciones:

(i) $f(0) = 0$, (ii) $f(2n) = 2f(n)$, (iii) $f(2n+1) = n + 2f(n)$ para todo $n \geq 0$.

(a) Determinar los tres conjuntos:

$$L := \{n \mid f(n) < f(n+1)\}, \quad E := \{n \mid f(n) = f(n+1)\}, \quad G := \{n \mid f(n) > f(n+1)\}.$$

(b) Para cada $k \geq 0$, encontrar una fórmula para $a_k := \max\{f(n) : 0 \leq n \leq 2^k\}$ en términos de k .

PROBLEMA 5:

Sean a, b, c enteros que satisfacen $0 < a < c - 1$ y $1 < b < c$. Para cada k , $0 \leq k \leq a$, sea r_k , $0 \leq r_k < c$, el residuo de kb cuando es dividido para c . Demostrar que los dos conjuntos $\{r_0, r_1, r_2, \dots, r_a\}$ y $\{0, 1, 2, \dots, a\}$ son distintos.