XXI OLIMPIADA MATEMÁTICA ASIA-PACÍFICO
MARZO 2009

Tiempo permitido: 4 horas
No se permite el uso de calculadoras
Cada problema tiene un valor de 7 puntos

PROBLEMA 1:
Considerar la siguiente operación en los reales positivos escritos en una pizarra: *Se elige un número r escrito en la pizarra, se borra ese número, y luego se escribe una pareja de reales positivos a y b que cumplen $2r^2 = ab$ en la pizarra.*
Asumir que se inicia con un solo número real positivo r en la pizarra, y se realiza la operación $k^2 - 1$ veces para terminar con k^2 reales positivos, no necesariamente distintos. Demostrar que existe un número en la pizarra que no excede kr.

PROBLEMA 2:
Sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 números reales que satisfacen la ecuación

$$\frac{a_1}{k^2+1} + \frac{a_2}{k^2+2} + \frac{a_3}{k^2+3} + \frac{a_4}{k^2+4} + \frac{a_5}{k^2+5} = \frac{1}{k^2} \qquad ; \text{ para } k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Hallar el valor de $\frac{a_1}{37} + \frac{a_2}{38} + \frac{a_3}{39} + \frac{a_4}{40} + \frac{a_5}{41}$. (Expresar el valor en una fracción simple.)

PROBLEMA 3:
Tres circunferencias Γ_1, Γ_2 y Γ_3 que no se sobrelapan y que son mutuamente externas, son dadas en el plano. Para cada punto P en el plano, fuera de las 3 circunferencias, se construyen 6 puntos $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ de la siguiente manera: para cada $i = 1,2,3$, A_i, B_i son puntos distintos en la circunferencia Γ_i tales que PA_i y PB_i son tangentes a Γ_i. Se denomina al punto P *excepcional* si, de la construcción, las rectas A_1B_1, A_2B_2 y A_3B_3 son concurrentes. Demostrar que todos los puntos excepcionales del plano, si existen, pertenecen a una misma circunferencia.

PROBLEMA 4:
Demostrar que para cualquier entero positivo k, existe una secuencia aritmética $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_k}{b_k}$ de números racionales, donde a_i, b_i son enteros positivos primos entre sí para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, tales que los enteros positivos $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k$ son todos distintos entre sí.

PROBLEMA 5:
Larry y Rob son dos robots que viajan en un carro de Argovia a Zillis. Ambos robots tienen control de la dirección y dan la misma siguiendo el algoritmo: Larry realiza un giro de 90° a la izquierda luego de cada l kilómetros, considerados desde el inicio; Rob realiza un giro de 90° a la derecha luego de cada r kilómetros, considerados desde el incio, con l y r enteros positivos coprimos. En el caso de que ambos giros deban realizarse simultáneamente, el carro continuará recto, sin giro alguno. Asumir que el piso es plano y que el carro se puede mover en cualquier dirección.
El carro inicia en Argovia y está direccionado hacia Zillis. ¿Para qué parejas (l, r) se garantiza que el carro llegará a Zillis, sin importar la distancia a la que se encuentra de Argovia?