XXIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ASIA-PACÍFICO
MARZO 2011

Tiempo permitido: 4 horas
No se permite el uso de calculadoras
Cada problema tiene un valor de 7 puntos

PROBLEMA 1:

Sean a,b,c enteros positivos. Demostrar que es imposible que todos los tres números a^2+b+c, b^2+c+a, c^2+a+b sean cuadrados perfectos.

PROBLEMA 2:

Cinco puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 se encuentran en el plano de tal manera que no hay tres colineales. Determinar el máximo valor posible tal que el mínimo valor para los ángulos $\measuredangle A_i A_j A_k$ puede tomar, donde i, j, k son enteros distintos entre 1 y 5.

PROBLEMA 3:

Sea ABC un triángulo acutángulo con $\measuredangle BAC = 30^\circ$. La bisectriz interna y externa del ángulo $\measuredangle ABC$ intersecta a la recta AC en B_1 y B_2, respectivamente, y la bisectriz interna y externa del ángulo $\measuredangle ACB$ intersecta a la recta AB en C_1 y C_2, respectivamente. Suponer que las circunferencias con diámetros B_1B_2 y C_1C_2 se cortan en el interior del triángulo ABC en el punto P. Demostrar que $\measuredangle BPC = 90^\circ$.

PROBLEMA 4:

Sea n un entero positivo impar fijo. Se toman $m+2$ puntos distintos $P_0, P_1, \ldots, P_{m+1}$ (donde m es un entero no negativo) en el plano cartesiano de tal manera que se cumplen las siguientes 3 condiciones:

(1) $P_0 = (0,1)$, $P_{m+1} = (n+1, n)$, y para todo entero i, $1 \le i \le m$, ambas coordenadas x, y de P_i son enteros entre 1 y n (1 y n inclusive).

(2) Para todo entero i, $0 \le i \le m$, P_iP_{i+1} es paralelo al eje x si i es par, y es paralelo al eje y si i es impar.

(3) Para toda pareja (i, j) con $0 \le i < j \le m$, los segmentos P_iP_{i+1} y P_jP_{j+1} comparten máximo 1 punto.

Determinar el máximo valor posible que m puede tomar.

PROBLEMA 5:

Determinar todas las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes dos condiciones:

(1) Existe un real M tal que para todo real x, $f(x) < M$ se cumple.

(2) Para toda pareja de reales (x, y) se cumple

$$f\left(x f(y)\right) + y f(x) = x f(y) + f(xy)$$