XXIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ASIA-PACÍFICO
MARZO 2012

Tiempo permitido: 4 horas
No se permite el uso de calculadoras
Cada problema tiene un valor de 7 puntos

PROBLEMA 1:

Sea P un punto en el interior del triángulo ABC, y sean D, E y F la intersección de la recta AP con el lado BC, de la recta BP con el lado CA, de la recta CP con el lado AB, respectivamente. Demostrar que el área del triángulo ABC debe ser 6 si el área de cada uno de los triángulos PFA, PDB y PEC es 1.

PROBLEMA 2:

En cada casilla de una malla cuadrada de 2012×2012 se inserta un número real mayor o igual a 0 y menor o igual a 1. Se considera la división de la malla en dos rectángulos no vacíos, conformados por las casillas de la malla, trazando una recta paralela a uno de los lados de la malla. Suponer que para al menos uno de los dos rectángulos resultantes la suma de los números en sus casillas internas es menor o igual a 1, no importa cómo se dividió la malla en los dos rectángulos. Determinar el máximo valor posible para la suma de todos los 2012×2012 números insertados en las casillas.

PROBLEMA 3:

Determinar todas las parejas (p,n) de un número primo p y un entero positivo n para los cuales $\dfrac{n^p+1}{p^n+1}$ es un entero.

PROBLEMA 4:

Sea ABC un triángulo acutángulo. Sean D el pie de la perpendicular trazada desde el punto A al lado BC, M el punto medio de BC, y H el ortocentro de ABC. Sea E la intersección de la circunferencia circunscrita Γ del triángulo ABC y la semirecta MH, y F la intersección (diferente de E) de la recta ED y la circunferencia Γ. Demostrar que $\dfrac{BF}{CF}=\dfrac{AB}{AC}$.

PROBLEMA 5:

Sea n un entero mayor o igual a 2. Demostrar que si los números reales $a_1,a_2,\ldots,a_n$ cumplen $a_1{}^2+a_2{}^2+\ldots+a_n{}^2=n$, entonces

$$\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{n-a_ia_j}\le\frac{n}{2}$$

se cumple.