XXV OLIMPIADA MATEMÁTICA ASIA-PACÍFICO

MARZO 2013

Tiempo permitido: 4 horas
No se permite el uso de calculadoras
Cada problema tiene un valor de 7 puntos

PROBLEMA 1:

Sea ABC un triángulo acutángulo con alturas AD, BE y CF, y con circuncentro O. Demostrar que los segmentos OA, OF, OB, OD, OC, OE dividen el triángulo ABC en tres parejas de triángulos que tienen áreas iguales.

PROBLEMA 2:

Determinar todos los enteros positivos n para los cuales $\dfrac{n^2+1}{\left[\sqrt{n}\right]^2+2}$ es un entero.

Nota: $[r]$ representa al mayor entero menor o igual a r.

PROBLEMA 3:

Para $2k$ números reales $a_1,a_2,\ldots,a_k,b_1,b_2,\ldots,b_k$ se define la secuencia de números X_n por

$$X_n=\sum_{i=1}^{k}\left[a_in+b_i\right] \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Si la secuencia X_n forma una progresión aritmética, demostrar que $\sum_{i=1}^{k}a_i$ debe ser un entero.

Nota: $[r]$ representa al mayor entero menor o igual a r.

PROBLEMA 4:

Sean a y b enteros positivos, y sean A y B conjuntos finitos de enteros tales que:

(i) A y B son disjuntos.
(ii) Si un entero i pertenece al conjunto A o al conjunto B, entonces $i+a$ pertenece a A o $i-b$ pertenece a B.

Demostrar que $a|A|=b|B|$.

Nota: $|X|$ representa el número de elementos que hay en el conjunto X.

PROBLEMA 5:

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en la circunferencia ω, y sea P un punto en la extensión de AC tal que PB y PD son tangentes a ω. La tangente en C intersecta PD en Q y la recta AD en R. Sea E el segundo punto de intersección entre AQ y ω. Demostrar que B, E y R son colineales.