XXVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ASIA-PACÍFICO
MARZO 2014

Tiempo permitido: 4 horas
No se permite el uso de calculadoras
Cada problema tiene un valor de 7 puntos

PROBLEMA 1:

Para un entero positivo m se definen $S(m)$ y $P(m)$ como la suma y el producto, respectivamente, de los dígitos de m. Demostrar que para todo entero positivo n existen enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$S(a_1) < S(a_2) < \ldots < S(a_n) \text{ y } S(a_i) = P(a_{i+1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Nota: $a_{n+1} = a_1$.

PROBLEMA 2:

Sea $S = \{1, 2, \ldots, 2014\}$. Para cada subconjunto no vacío $T \subseteq S$, uno de sus elementos es elegido como su *representante*. Hallar el número de formas de elegir los representantes de todos los subconjuntos no vacíos de S de tal manera que si un subconjunto $D \subseteq S$ es una unión disjunta de subconjuntos no vacíos $A, B, C \subseteq S$, entonces el representante de D también es el representante de por lo menos uno de los conjuntos A, B, C.

PROBLEMA 3:

Hallar todos los enteros positivos n tales que para cualquier entero k existe un entero a para el cual $a^3 + a - k$ es divisible por n.

PROBLEMA 4:

Sean n y b enteros positivos. Se dice que n es un b-exigente si existe un conjunto de n enteros positivos distintos menores que b que no tienen dos subconjuntos distintos U y V tales que la suma de los elementos de U sea igual a la suma de los elementos en V.

(a) Demostrar que 8 es un 100-exigente.
(b) Demostrar que 9 no es un 100-exigente.

PROBLEMA 5:

Las circunferencias ω y Ω se cortan en los puntos A y B. Sea M el punto medio del arco AB de la circunferencia ω (M dentro de Ω). Una cuerda MP de la circunferencia ω intersecta Ω en Q (Q dentro de ω). Sea ℓ_P la recta tangente a ω en P, y sea ℓ_Q la recta tangente a Ω en Q. Demostrar que la circunferencia circunscrita del triángulo formado por las rectas ℓ_P, ℓ_Q y AB es tangente a Ω.