II COMPETENCIA IBEROAMERICANA INTERUNIVERSITARIA DE MATEMÁTICAS

Primer día

Petrópolis, Brasil, 5 de octubre de 2010

Problema 1 Dados dos vectores $v = (v_1, \ldots, v_n)$ y $w = (w_1, \ldots, w_n)$ en $\mathbb{R}^n$, definimos la matriz $v * w$ en la cual el elemento en la línea i y la columna j es $v_i w_j$. Suponga que v y w son linealmente independientes. Determine el rango de la matriz $v * w - w * v$.

Obs.: El rango de una matriz es su número máximo de columnas linealmente independientes.

Problema 2 En un lado de un pasillo existen $2N$ habitaciones igualmente espaciadas numeradas sucesivamente de 1 hasta $2N$. En cada habitación i entre 1 y N existen p_i camas. Se desea transportar todas estas camas a las habitaciones de la $N+1$ a la $2N$, de modo que al final, para cada j entre $N+1$ y $2N$ haya p_j camas en la habitación j. Suponga que cada cama puede ser transportada una única vez y que el costo para transportar una cama entre la habitación i y la habitación j es $(i-j)^2$.
Determine una manera de mover cada cama de tal forma que se minimice el costo total.

Obs.: Los números p_i son dados y cumplen que $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = p_{N+1} + p_{N+2} + \cdots + p_{2N}$.

Problema 3 Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tiene *dimensión cero* si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existen un entero positivo k e intervalos acotados $I_1, I_2, \ldots, I_k$ tales que $X \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$ y $\sum_{j=1}^{k} |I_j|^{\varepsilon} < \varepsilon$.
Pruebe que existen conjuntos $X, Y \subset [0,1]$, ambos de dimensión cero, tales que $X + Y = [0,2]$, donde $X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$.

Obs.: $|I|$ denota la longitud del intervalo I.

Tiempo de prueba: 4 horas 30 minutos
Cada problema vale 10 puntos

II COMPETENCIA IBEROAMERICANA INTERUNIVERSITARIA DE MATEMÁTICAS

Segundo día

Petrópolis, Brasil, 6 de octubre de 2010

Problema 4 Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función creciente, continua en $[0,1]$, derivable en $(0,1)$ y con derivada menor que 1 en cada punto. Definimos la sucesión de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de la siguiente forma: $A_1 = f([0,1])$, y para $n \geq 2, A_n = f(A_{n-1})$. Demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(A_n) = 0$, donde $d(A)$ es el diámetro del conjunto A.

Obs.: El diámetro del conjunto X se define como $d(X) = \sup\limits_{x,y\in X} |x-y|$, o bien como la longitud del intervalo $[a,b]$ que contiene a X para el cual $b-a$ es mínimo.

Problema 5 Sean n y d enteros mayores que 1 con $\operatorname{mcd}(n, d!) = 1$. Pruebe que n y $n+d$ son primos si, y solo si

$$d!d((n-1)!+1) + n(d!-1) \equiv 0 \pmod{n(n+d)}.$$

Problema 6 Decimos que un grupo es localmente cíclico si cada uno de sus subgrupos finitamente generados es cíclico. Pruebe que un grupo localmente cíclico es isomorfo a uno de sus subgrupos propios si y sólo si es isomorfo a un subgrupo propio del grupo de los números racionales con la operación suma.

Obs.:
– Un grupo es finitamente generado si contiene un subconjunto finito de elementos tal que con estos y sus inversos es posible obtener cualquier otro elemento del grupo usando la operación del grupo un número finito de veces.
– Un grupo es cíclico si es generado por un elemento.
– Un subgrupo propio es un subgrupo estrictamente contenido en el grupo.

Tiempo de prueba: 4 horas 30 minutos
Cada problema vale 10 puntos