

Miércoles 15 de julio de 2009

Problema 1. Sea n un entero positivo y sean a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$) enteros distintos del conjunto $\{1, \dots, n\}$, tales que n divide a $a_i(a_{i+1} - 1)$, para $i = 1, \dots, k - 1$. Demostrar que n no divide a $a_k(a_1 - 1)$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con circuncentro O . Sean P y Q puntos interiores de los lados CA y AB , respectivamente. Sean K, L y M los puntos medios de los segmentos BP , CQ y PQ , respectivamente, y Γ la circunferencia que pasa por K, L y M . Se sabe que la recta PQ es tangente a la circunferencia Γ . Demostrar que $OP = OQ$.

Problema 3. Sea s_1, s_2, s_3, \dots una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos tal que las subsucesiones

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{y} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

son ambas progresiones aritméticas. Demostrar que la sucesión s_1, s_2, s_3, \dots es también una progresión aritmética.

Jueves 16 de julio de 2009

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB = AC$. Las bisectrices de los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ABC$ cortan a los lados BC y CA en D y E , respectivamente. Sea K el incentro del triángulo ADC . Supongamos que el ángulo $\angle BEK = 45^\circ$. Determinar todos los posibles valores de $\angle CAB$.

Problema 5. Determinar todas las funciones f del conjunto de los enteros positivos en el conjunto de los enteros positivos tales que, para todos los enteros positivos a y b , existe un triángulo no degenerado cuyos lados miden

$$a, f(b) \text{ y } f(b + f(a) - 1).$$

(Un triángulo es *no degenerado* si sus vértices no están alineados).

Problema 6. Sean a_1, a_2, \dots, a_n enteros positivos distintos y M un conjunto de $n - 1$ enteros positivos que no contiene al número $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Un saltamontes se dispone a saltar a lo largo de la recta real. Empieza en el punto 0 y da n saltos hacia la derecha de longitudes a_1, a_2, \dots, a_n , en algún orden. Demostrar que el saltamontes puede organizar los saltos de manera que nunca caiga en un punto de M .