Sugerencias a los directores:

Los *"Problemas Semanales"* fueron pensados para que durante ese tiempo estén expuestos a la vista de los alumnos en el patio escolar; pasado ese tiempo serán reemplazados por los nuevos. Sería bueno que en ese período los directores averigüen quienes los resolvieron y los alienten, con el apoyo de sus profesores a encontrar la solución más original o la más corta o la que usa recursos más elementales o ingeniosos. Este es el camino que conduce a la Olimpíada de Matemática y disfrutar de una tarea creativa ampliamente valorada.

*Difunda los Problemas!!!*

# Problemas Semanales

de Patricia Fauring y Flora Gutiérrez

**Fecha: Últimas Semanas**

## Primer Nivel

**131.** Rocío debe escribir en una línea 100 números enteros distintos elegidos desde 1 hasta 199 de manera que cada número, a partir del segundo y hasta el anteúltimo, sea mayor que por lo menos uno de sus dos vecinos. A continuación calcula la suma de los números de las posiciones pares que denotamos $P$ y la suma de los números de las posiciones impares que denotamos $I$. Determinar el mayor valor posible de $P - I$ que puede obtener Rocío.

## Segundo Nivel

**231.** En el pizarrón está indicada una multiplicación de 26 números enteros positivos, o sea, 26 enteros separados por signos ×. Lucía cambia dos de los signos × por signos + y calcula el resultado de la nueva expresión. Repite este procedimiento para cada posible elección de dos signos × en la expresión inicial. (La expresión que calcula Lucía siempre tiene dos signos + y 23 signos ×.) De todos los números que obtiene Lucía, exactamente 115 son impares. Si se sabe que en la expresión del pizarrón los números impares figuran exclusivamente en bloques de 2 y bloques de 3 (o sea, no hay ningún impar aislado ni hay nunca cuatro impares seguidos), calcular cuántos de los 26 números del pizarrón pueden ser impares.

## Tercer Nivel

**331.** Hallar todos los números reales $x$ tales que

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor = 2008.$$

ACLARACIÓN: Los corchetes denotan la parte entera del número que encierran. Por ejemplo, $\left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor = 2$; $\lfloor 4 \rfloor = 4$; $\left\lfloor \frac{3}{8} \right\rfloor = 0$.

**Primer Nivel**

**132.** Determinar si es posible dividir un cuadrado de lado 11 en las siguientes 5 partes: un cuadrado de lado 1 y cuatro rectángulos cuyas dimensiones son 8 números enteros distintos y mayores que 1. ¿Y si el cuadrado que se quiere dividir es de lado 10?

**Segundo Nivel**

**232.** Sea $P$ el número que se obtiene al multiplicar los factoriales de los primeros 2008 enteros positivos: $P = (1!)(2!)(3!)...(2007!)(2008!)$.

Determinar si es posible cancelar uno de estos factoriales de modo que la multiplicación de los 2007 factoriales que quedan sea un cuadrado perfecto.

ACLARACIÓN: El factorial de un número entero positivo es la multiplicación de todos los enteros desde 1 hasta dicho número. Por ejemplo, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$; $12! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 12 = 479001600$.

Un número entero se llama cuadrado perfecto si es el cuadrado de un número entero. Por ejemplo, 16 y 10000 son cuadrados perfectos, porque $16 = 4^2$ y $10000 = 100^2$.

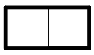
**Tercer Nivel**

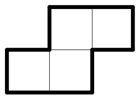
**332.** Hallar todas las potencias perfectas que terminan con los dígitos 2, 0, 0, 8, en ese orden.

ACLARACIÓN: Se llama potencia perfecta a un número de la forma $a^k$ donde $a$ y $k$ son enteros positivos y $k \geq 2$. Por ejemplo, $6^2$; $2^7$; $100^3$.

**Primer Nivel**

**133.** Se tiene un tablero de 2008 × 2008 dividido en casillas de 1 × 1. Se dispone de piezas de los siguientes dos tipos:





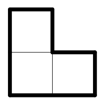
Hay exactamente 1006 piezas del primer tipo y una cantidad inagotable de piezas del segundo tipo. Mostrar que con estas piezas es posible cubrir completamente el tablero, sin huecos ni superposiciones y sin sobresalirse del tablero.

ACLARACIÓN: Cada pieza del primer tipo cubre exactamente dos casillas del tablero y cada pieza del segundo tipo cubre exactamente 4 casillas del tablero.

Las piezas se pueden girar y/o dar vuelta.

**Segundo Nivel**

**233.** Se considera un tablero de $a \times b$, con $a$ y $b$ enteros mayores o iguales que 2, y piezas con la forma que se ve en la figura, cada una de las cuales cubre exactamente tres casillas del tablero. Al cubrir el tablero, las piezas se pueden superponer, pero con la condición de que todas las casillas del tablero estén cubiertas por la misma cantidad de piezas cada una.



Las piezas no pueden sobresalir del tablero.

Determinar todos los valores de $a$ y $b$ para los que un tablero de $a \times b$ se puede cubrir en estas condiciones.

ACLARACIÓN: Las piezas se pueden girar.

**Tercer Nivel**

**333.** Se considera un tablero de $a \times b$, con $a$ y $b$ enteros mayores o iguales que 2. Inicialmente sus casillas están coloreadas de blanco y de negro como un tablero de ajedrez. La operación permitida consiste en elegir dos casillas con un lado común y recolorearlas de la siguiente manera: una casilla blanca pasa a negra; una casilla negra pasa a verde; una casilla verde pasa a blanca.

Determinar para qué valores de $a$ y $b$ es posible, mediante una sucesión de operaciones permitidas, lograr que todas las casillas que inicialmente eran blancas finalicen negras y todas las casillas que inicialmente eran negras finalicen blancas.

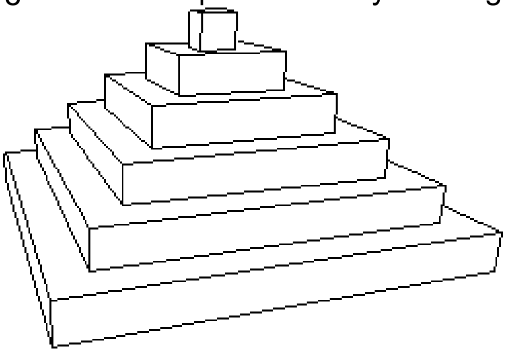
ACLARACIÓN: Inicialmente no hay casillas verdes, pero estas aparecen luego de la primera operación.

# Torneo de Computación y Matemática 2009
# Problemas Semanales

**Fecha: Últimas Semanas**

***XII-131***

El zigurat de Nahr-Zaggrond es similar a una pirámide. Está construido con bloques cúbicos de 76cm de lado. Los bloques están dispuestos en pisos cuadrados. Cada piso tiene dos bloques menos, por lado, que el piso inmediatamente inferior. El piso superior tiene un solo bloque. La pirámide tiene 38m de altura. ¿Cuántos bloques constituyen el zigurat?



***XII-231***

a) Calcular la longitud del periodo de 355/113

b) Calcular la longitud del periodo de 1/12581

Nota: La longitud de periodo de la fracción 3/5 es 0, de 7/6 es 1, de 1/7 es 6, etc.

***XII-331***

Hallar todas las potencias de 5 que en su expresión decimal no tienen dos dígitos consecutivos iguales y todos sus dígitos son pares salvo el ultimo de la derecha. Por ejemplo, 25.

**Comentario C y M de la semana:**

¿Tus ciclos terminan siempre?

***XII-132***

Para una fiesta de casamiento se compraron 7 botellas de $53, 11 botellas de $37 y 8 botellas de $66. Como los novios se pelearon, se suspendió la fiesta y decidieron repartir las botellas de manera que el precio total de cada una de las dos partes sea el mismo.

a) ¿Es posible repartirlas así?

b) ¿Es posible repartirlas de manera que, *además* del precio total, la cantidad de botellas sea igual?

***XII-232***

Encontrar un número entero positivo $N$ tal que las últimas cuatro cifras de $N^7$ sean 1119.

(Las ultimas cuatro cifras de 2320772 son 0772.)

***XII-332***

Sea $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ si $n>1$, la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo $F_2=1$, $F_3=2$, $F_4=3$, $F_5=5$, $F_6=8$.

i) Hallar tres funciones $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ lineales y dos funciones $g(n)$, $h(n)$ tales que valga que para todo $n>0$,

$$0 \cdot F_0 + 1 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2 + \ldots + n \cdot F_n = a(n) \cdot F_{g(n)} + b(n) \cdot F_{h(n)} + c(n)$$

**Una función es lineal cuando es de la forma $d(n) = s \cdot n + t$**

ii) Demostrarlo.

**Comentario C y M de la semana:**

Para entender recursión, primero hay que entender recursión.

***XII-133***

Cierto número de 5935 cifras está escrito usando sólo tres dígitos distintos, ninguno de los cuales aparece menos de 100 veces. La suma de sus cifras es 5981 y la suma de los cuadrados de sus cifras es 9957. ¿Qué dígitos son y cuántas veces aparece cada uno?

Ejemplo: 2005 tiene 4 cifras, la suma de sus cifras es 2+0+0+5 = 7, y la suma de los cuadrados de sus cifras es 4+0+0+25 = 29.

***XII-233***

Buscar *todas* las ternas de números enteros positivos ($x$;$y$;$z$) que verifican que

$$5(x+y+z)=xyz$$

***XII-333***

a) Hallar funciones lineales $f$ y $g$ tales que siempre que $a$ y $b$ sean números enteros no negativos y $0 \le a \le b$ valga que

$$\binom{a}{0}\binom{b}{0}+\binom{a}{1}\binom{b}{1}+\binom{a}{2}\binom{b}{2}+\ldots+\binom{a}{a-1}\binom{b}{a-1}+\binom{a}{a}\binom{b}{a}=\binom{f(a,b)}{g(a,b)}$$

b) Demostrar la identidad hallada en a).

Nota: El combinatorio se calcula como $\binom{a}{b}=\frac{a!}{b!\,(a-b)!}$. El factorial se define como 0!=1 y si $n$ es un entero positivo entonces $n!=(n-1)!\cdot n$. Por ejemplo 5!=120 y $\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=10$

Una función $f(a,b)$ es una función lineal si la podemos calcular usando la fórmula $f(a,b) = c\cdot a + d\cdot b + e$ en donde $c$, $d$ y $e$ son números fijos.

Comentario CyM de la semana:

¡El **Nacional** de CyM 2009 es muy pronto! Dentro de la semana del 17 al 20 de noviembre.

Las fechas exactas y los detalles aparecen en http://www.oma.org.ar/nacional/cym/index.htm


Santa Fe 3312, 9 D - (C1425BGV) Bs. As. - tel/fax:(11)48266900 -
email: cym@oma.org.ar - http://www.oma.org.ar/nacional/cym/