Olimpiada Nacional de Matemática 2016

Tercera Fase - Nivel 1

Soluciones

Problema 1. Se tiene el número

$$N = 101010101010...$$

que se forma con unos y ceros de forma alternada. Si se sabe que N tiene 2016 dígitos en total, determinar la suma de los dígitos de N.

Solución: Veamos que N tiene un total de $2016 \div 2 = 1008$ dígitos 0 y la misma cantidad de dígitos 1, entonces la suma de los dígitos de N es $\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{1008} + \underbrace{0 + 0 + ... + 0}_{1008} = 1008$

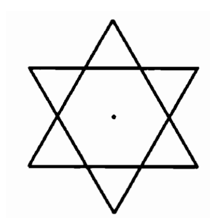
Problema 2. Jorge le debe a Vicente 35 centavos y tiene un bolsillo lleno de monedas de 5 centavos, monedas de 10 centavos, y monedas de 25 centavos las cuales puede usar para pagarle. Encontrar la diferencia entre el mayor número de monedas que puede usar y el menor número de monedas que puede usar para pagarle.

Solución: Veamos que el mayor número de monedas que puede usar es cuando usa sólo monedas de 5 centavos, que son los de menor denominación, y en este caso usaría $35 \div 5 = 7$ monedas.

Veamos que el menor número de monedas que puede usar es cuando usa sólo 2 monedas: 1 de 10 y una de 25, esto se debe a que es imposible pagar con una sola moneda ya que no hay una de 35 centavos.

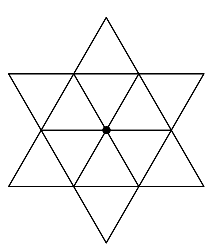
Con lo que el valor pedido es $7 - 2 = 5$ monedas.

Problema 3. Cuando dos triángulos equiláteros comparten un centro común, su unión puede ser una estrella, como la figura.



Su región común es un hexágono regular con área 60. Encontrar el área de uno de los triángulos equiláteros originales.

Solución:



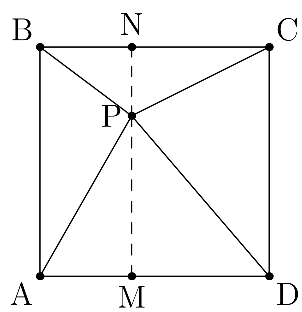
Dibuja las 3 diagonales del hexágono, como en la figura, para partir la figura en 12 triángulos equiláteros pequeños. Dado que la región en común tiene un área de 60, cada triángulo pequeño tiene un área de 10. Como cada tríangulo original está compuesto de 9 triángulos pequeños, su área es 90.

Problema 4. Demostrar que 93 no se puede escribir como la suma de 2 primos.

Solución: Se sabe que par + impar = impar, es la única forma que dos enteros sumen un número impar. Como el único primo par es 2 se tiene que $93 = 2 + 91$, pero $91 = 7 \times 13$, asi que no se puede escribir 93 como la suma de dos primos.

Problema 5. Sea P un punto en el interior de un cuadrado $ABCD$. Si las áreas de los triángulos PDA y PBC son 4 y 6 respectivamente, calcular la longitud del lado del cuadrado.

Solución:
Solución 1:
Denotemos con (XYZ) al área del triángulo XYZ.
Sea a la longitud del lado del cuadrado, trazamos PM y PN, que son las perpendiculares a los lados AD y BC, respectivamente.



Como $(PDA) = 4$, tenemos

$$(PDA) = \frac{AD \cdot PM}{2} = \frac{a \cdot PM}{2} = 4$$

y como $(PBC) = 6$, tenemos

$$(PBC) = \frac{BC \cdot NP}{2} = \frac{a \cdot NP}{2} = 6$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones tenemos

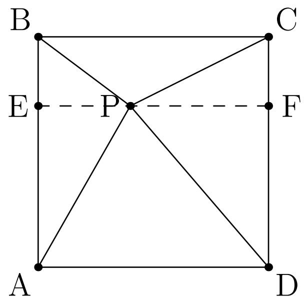
$$\frac{a \cdot (PM + NP)}{2} = 10$$

Pero es claro que $PM + NP = a$, luego

$$\frac{a^2}{2} = 10 \rightarrow a = \sqrt{20}$$

con lo cual el lado mide $\sqrt{20}$.

Solución 2:
Denotemos con (XYZ) al área del triángulo XYZ.
Se traza un segmento paralelo a AD que pase por P.



Claramente el cuadrado $ABCD$ ha quedado dividido en 2 rectángulos $AEFD$ y $BCFE$.
Es claro que $8 = 2 \cdot (PDA) = (AEFD)$ así como $12 = 2 \cdot (PBC) = (BCFE)$.
Entonces $(ABCD) = (AEFD) + (BCFE) = 8 + 12 = 20$, con lo cual el lado mide $\sqrt{20}$.

Problema 6. ¿Es posible que la suma de dos primos consecutivos sea el doble de otro primo?

Solución: Supongamos que existen p_1, p_2 y p_3 primos con p_1 y p_2 primos consecutivos y $p_1 + p_2 = 2 \cdot p_3$. Entonces se tiene que $p_3 = \frac{p_1+p_2}{2}$, en otras palabras p_3 es el promedio de p_1 y p_2. Ya que p_1 y p_2 son distintos, el promedio de ellos está estrictamente entre ambos y debe ser primo. Sin embargo, p_1 y p_2 son primos consecutivos y por lo tanto no existe ningún primo entre ellos. Contradicción, por lo tanto no existe p_3 que cumpla.

Problema 7. Los números $1, 2, 3, \ldots, 16$ son distribuidos en las casillas de un tablero de 4×4 de tal forma que ningún número se repita. Luego, para cada fila se sombrea con lápiz la casilla que tiene escrito el número mayor y a continuación se hace lo mismo con cada una de las columnas y con cada una de las dos diagonales. ¿Cuál es el menor número de casillas que quedarán sombreadas al terminar el proceso, cualquiera que sea la distribución de los 16 números en las casillas?

Solución: En cada fila se sombrea al menos una casilla, luego, en todo el tablero se sombrean al menos 4 casillas.

Un ejemplo de tablero que cumpla con las condiciones dadas es el siguiente:

16	1	2	3
4	5	14	6
7	13	8	9
10	11	12	15