Olimpiada Nacional de Matemática 2016

Fase Final - Nivel 1

Soluciones

Problema 1. Adrián hace una lista de los enteros positivos que no son divisibles para 3. Inicia escribiendo el 1, después el 2, luego el 4 y así sucesivamente. ¿Qué número se va a encontrar en el puesto 2016?

Solución: Veamos que en el grupo de números 1, 2, 3 el número 3 (primer múltiplo de 3 positivo) no se escribe, en el grupo de números 4, 5, 6 el número 6 (segundo múltiplo de 3 positivo) no se escribe, y así sucesivamente, entonces podemos afirmar que si continuamos distribuyendo el análisis en grupos de 3 el último número que es múltiplo de 3 no se escribirá y los otros dos sí, es decir habrán dos números que se escribirán por cada grupo, como se desea llegar al puesto 2016 entonces se deberán analizar un total de $2016 \div 2 = 1008$ grupos ya que el último número que se escriba de dicho grupo será el número que se encontrará en la posición 2016, pero como dicho grupo terminarán en el 1008avo múltiplo de 3 positivo, que evidentemente corresponde al $1008 \cdot 3 = 3024$, entonces podemos concluir que el último número que se escribirá para llegar al puesto 2016 será $3024 - 1 = 3023$.

Problema 2. Andrea le dice a Daniel que ella ha escrito en su cuaderno 5 enteros positivos distintos y también le dice la suma de esos 5 números. Con esa información Daniel puede saber con seguridad qué números escribió Andrea. ¿Cuáles son los valores que puede tomar la suma de los números escritos en el cuaderno de Andrea?

Solución: Los posibles valores de la suma son 15 y 16. Notemos que la menor suma posible de 5 enteros positivos distintos es $1+2+3+4+5 = 15$ y por lo tanto si la suma es 15 entonces Daniel sabrá con certeza que los números escritos son 1,2,3,4,5 ya que es la menor suma posible. La única manera de escribir 16 como suma de 5 enteros positivos distintos es $1 + 2 + 3 + 4 + 6$, todas las otras maneras conllevan a tener al 2 sumandos iguales, al menos.

Notemos que $17 = 1 + 2 + 3 + 4 + 7 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6$ y por lo tanto dada la suma, Daniel no puede saber con certeza los 5 sumandos del cuaderno de Andrea. En general, cualquier entero $S \geq 17$, lo podemos expresar como suma de 5 enteros positivos distintos de dos maneras distintas:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + x = 1 + 2 + 3 + 5 + (x - 1)$$

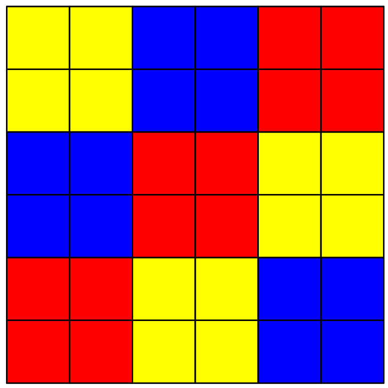
donde $x > 5$. Ya que $x > 5$, ninguno de los sumandos va a ser igual a otro.

Se concluye entonces, que los únicos dos valores que puede tomar la suma de los números escritos por Andrea son 15 y 16.

Problema 3. Un cuadrado de lado n se divide en n^2 casillas de lado 1, cada una coloreada de amarillo, azul o rojo. Hallar el menor valor de n tal que para cualquier forma de colorear las casillas del cuadrado, exista una fila o una columna con al menos tres casillas del mismo color.

Solución: El menor valor posible de n es 7. Por el principio de las casillas, si una fila/columna contiene 7 o más casillas, entonces existirán por lo menos 3 casillas del mismo color en esa fila/columna.

A continuación se muestra un cuadrado de lado 6 que cumple que ninguna fila ni columna tiene 3 cuadrados del mismo color, y apartir de él se pueden generar cuadrados de lado menor a 6 que cumple lo mismo.



Por lo que se puede concluir que 7 es el mínimo.

Problema 4. En una pizarra están escritos los números naturales del 1 al 9. Diana borra cuatro números, Paola borra otros cuatro y queda un número x sin borrar. Si se sabe que la suma de los números borrados por Paola es el triple de la suma de los números borrados por Diana, ¿cuáles son todos los posibles valores de x?

Solución: Veamos que la suma de 4 números naturales entre 1 y 9 es como mínimo $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ y el máximo es $6 + 7 + 8 + 9 = 30$ que evidentemente hará que si Diana borra los números 1, 2, 3 y 4, y si Paola borra los números 6, 7, 8, y 9 se cumplirá lo que indica el problema, entonces el valor de x sería 5.

Por otro lado veamos que si Diana no borra todos los cuatro números más pequeños entonces la suma de sus números será mayor que 10, por lo que el triple de su suma será mayor que $3 \cdot 10 = 30$ pero esto es imposible ya que los números mayores suman 30 entonces no sería posible, y si Paola no borra todos los cuatro números mayores entonces su suma será menor que 30, por lo que su tercera parte será menor que $30 \div 3 = 10$ pero esto es imposible ya que los números menores suman 10 entonces no sería posible, con lo que la única forma en que se puede cumplir lo indicado en el problema es que los números sean borrados como se indicó en el primer párrafo, entonces el único valor posible de x es 5.

Problema 5. Se tienen 40 puntos en el plano, donde no hay tres colineales. A cada punto se le asigna un número del 1 al 40 sin repetición. Luego se une cada par de puntos mediante segmentos de recta de colores amarillo, azul o rojo, de acuerdo con las siguientes condiciones:

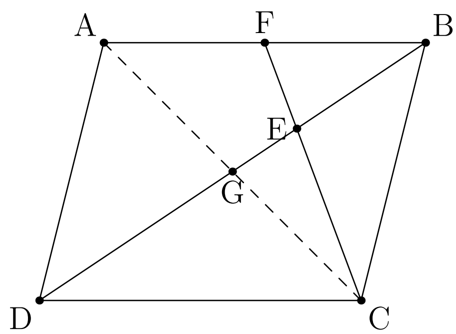
- Si la suma de los números asignados a los puntos es múltiplo de 3, el segmento correspondiente será de color amarillo.
- Si la suma de los números asignados a los puntos disminuida en 1 es un múltiplo de 3, el segmento correspondiente será de color azul.
- Si la suma de los números asignados a los puntos disminuida en 2 es múltiplo de 3, el segmento correspondiente será de color rojo.

¿Cuántos triángulos se han formado con sus tres lados de colores distintos?

Solución: En primer lugar notemos que para que un triángulo tenga sus tres lados de colores distintos es necesario y suficiente que los tres números asignados a sus vértices dejen restos distintos al ser divididos entre 3.
De los números del 1 al 40 hay exactamente 14 números múltiplos de 3 más 1, 13 números múltiplos de 3 más 2 y 13 números múltiplos de 3. Luego, contar el número de triángulos con lados de distinto color es equivalente a contar el número de ternas que se pueden formar utilizando exactamente un número de cada grupo, por el Principio del Producto tenemos que hay $14 \times 13 \times 13 = 2366$ triángulos con lados de distinto color.

Problema 6. En el paralelogramo $ABCD$, una recta que pasa por C corta a la diagonal BD en E y AB en F. Si F es el punto medio de AB y el área de $\triangle BEC$ es 100, hallar el área del cuadrilátero $AFED$.

Solución: Se traza la recta AC que corta a DB en G.



En $\triangle ABC$, BG y CF son medianas; por lo tanto $FE = \frac{1}{2}(EC)$. Si $(BEC) = 100$ entonces $(EFB) = 50$ ya que comparten la misma altura.

Ahora veamos que $\triangle ABD$ y $\triangle FBC$ tienen la misma altura y $AB = 2(FB)$. Por lo tanto $(ABD) = 2 \cdot (FBC)$, y como $(FBC) = 150$ entonces $(ABD) = 300$.

Entonces tenemos que $(AFED) = (ABD) - (FBE) = 300 - 50 = 250$.