Olimpiada Nacional de Matemática 2016

Fase Final - Nivel 2

Criterios de calificación

Problema 1.

- Indicar que $d \geq 6$ .... (1 punto)
- Demostrar que $d \geq 6$ .... (1 punto)
- Analizar cada caso $d = 6$, $d = 7$, $d = 8$, $d = 9$ .... (1 punto cada uno)
- Sumar los casos correctamente .... (1 punto)

Problema 2.

Solución 1:

- Llegar a que $y^2 = 3(3x^2 + 30x + 95)$ .... (1 punto)
- Demostrar que 3 divide a y^2 .... (2 puntos)
- Demostrar que 9 divide y^2 .... (1 punto)
- Llegar a que 3 debe dividir a 95 .... (2 puntos)
- Concluir el problema .... (1 punto)

Solución 2:

- Llegar a que $9x^2 + 90x + 285 - y^2 = 0$ .... (1 punto)
- Plantear la ecuación general de la cuadrática .... (1 punto)
- Demostrar que $3 \mid \sqrt{y^2 - 60}$ .... (1 punto)
- Demostrar que $9 \mid y^2 - 60$ .... (1 punto)
- Determinar que $y^2 \equiv 60 (\mathrm{mod} 9)$ .... (2 puntos)
- Concluir el problema .... (1 punto)

Solución 3:

- Llegar a que $60 = y^2 - (3x + 15)^2$ .... (1 punto)
- Demostrar que $y > 3x + 17$ .... (2 puntos)
- Demostrar que $y^2 - (3x + 15)^2 > 60$ .... (3 puntos)
- Concluir el problema .... (1 punto)

Problema 3.

- Demostrar que K pertenece a la mediatriz de P_1P_{2011} .... (1 punto)
- Demostrar que K pertenece a la mediatriz de $P_{1000}P_{2000}$ .... (1 punto)

- Concluir que K es el centro de la circunferencia . . . . . . (2 puntos)
- Indicar que $KP_{2016} = 2016$ . . . . . . (1 punto)
- Demostrar que si $P_{1000}P_{2000} \parallel P_1P_{2011} \Rightarrow KP_{2016}$ puede tomar cualquier valor . . . . . . (2 puntos)

Problema 4.

Solución 1:

- Escribir expresiones para S y T . . . . . . (3 puntos)
- Llegar a que $S + \frac{T}{2} = 51n$ . . . . . . (2 puntos)
- Llegar a que $\frac{3n(n+1)}{4} = 51n$ . . . . . . (1 punto)
- Concluir que $n = 67$ . . . . . . (1 punto)

Solución 2:

- Escribir expresiones para S y T . . . . . . (3 puntos)
- Resolver la ecuación $S = T$ . . . . . . (3 puntos)
- Concluir que $n = 67$ . . . . . . (1 punto)

No acumulable:

- Indicar que $S = \frac{n(n+1)}{2}$ . . . . . . (1 punto)

Problema 5.

- Construir AC y denotar la intersección de AC con DB . . . . . . (2 puntos)
- Demostrar que $(EFB) = 50$ . . . . . . (2 puntos)
- Llegar a que $(ABD) = 300$ . . . . . . (2 puntos)
- Concluir que $(FBE) = 250$ . . . . . . (1 punto)

Problema 6.

- Demostrar que $(2a-1)(2b-1) \geq 2ab - 1$ con su caso de igualdad . . . . . . (2 puntos)
- Demostrar que $(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geq 2abcd - 1$ con su caso de igualdad . . . . . . (2 puntos)
- Determinar la forma de los números $\overline{1111}$,$\overline{a111}$,$\overline{1b11}$,$\overline{11c1}$,$\overline{111d}$ . . . . . . (2 puntos)
- Calcular la cantidad de números adecuadamente . . . . . . (1 punto)