Olimpiada Nacional de Matemática 2016

Fase Final - Nivel 2

Soluciones

Problema 1. Un número natural de cinco dígitos se lo llama *ecuatoriano* si cumple las siguientes condiciones:

- Todos sus dígitos son distintos.
- El dígito que se encuentra en el extremo izquierdo es igual a la suma de los otros cuatro dígitos.

Ejemplo: 91350 es un número *ecuatoriano* ya que $9 = 1+3+5+0$, pero 54210 no lo es ya que $5 \neq 4+2+1+0$. Hallar cuántos números *ecuatorianos* existen.

Solución:
Notemos que el dígito del extremo izquierdo $d \geq 6$ ya que la suma de los otros dígitos es $\geq 0+1+2+3 = 6$.
Si $d = 6$, existe sólo una representación de 6 como suma de 4 dígitos distintos, $0+1+2+3$. Estos dígitos pueden ser permutados de cualquier manera, así que habrán $4! = 24$ números que cumplan cuando $d = 6$.
Si $d = 7$, hay también solo una representación de 7 como suma de 4 dígitos distintos, $0+1+2+4$. Pueden permutarse así que habrán $4! = 24$ números que cumplan en el caso $d = 7$.
Si $d = 8$, hay dos maneras de representarlo como suma de 4 dígitos distintos, $8 = 0+1+2+5 = 0+1+3+4$. En este caso entonces hay $2(4!) = 48$ números que cumplan.
Si $d = 9$, hay tres maneras de representarlo como suma de 4 dígitos distintos, $9 = 0+1+2+6 = 0+1+3+5 = 0+2+3+4$. En este caso entonces hay $3(4!) = 72$ números que cumplan.
Por lo tanto, en total hay $24+24+48+72 = 168$ números *ecuatorianos*.

Problema 2. Demostrar que no existen enteros positivos x, y tales que:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+9)^2 = y^2$$

Solución:
Solución 1:
Se procederá por reducción al absurdo, supongamos que sí existen dichos enteros. Tenemos que:

$$\begin{aligned} y^2 &= (x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+9)^2 \\ &= 9x^2 + 2(1+2+3+\ldots+9)x + (1^2+2^2+\ldots+9^2) \\ &= 9x^2 + 2\left(\frac{9\cdot 10}{2}\right)x + \frac{9\cdot 10\cdot 19}{6} \\ &= 3(3x^2+30x+95) \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$3 \mid y^2 \Rightarrow 3 \mid y \Rightarrow 3^2 \mid y^2 \Rightarrow 3^2 \mid 3(3x^2+30x+95) \Rightarrow 3 \mid 3x^2+30x+95 \Rightarrow 3 \mid 95$$

Pero esto último es una contradicción, pues 95 no es múltiplo de 3, por lo que hemos terminado la demostración.

Solución 2:
Al igual que en la solución 1 se resolverá por reducción al absurdo, y así mismo se obtiene que debería cumplirse que $y^2 = 9x^2 + 90x + 285$.
Lo anterior se cumple si y sólo si

$$9x^2 + 90x + 285 - y^2 = 0$$

Entonces esta ecuación debe tener soluciones enteras, por lo que

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-90 \pm \sqrt{8100 - 36(285 - y^2)}}{2(9)} \\ &= -5 \pm \frac{\sqrt{-2160 + 36y^2}}{18} \\ &= -5 \pm \frac{6\sqrt{y^2 - 60}}{18} \\ &= -5 \pm \frac{\sqrt{y^2 - 60}}{3} \end{aligned}$$

Entonces $3 \mid \sqrt{y^2 - 60} \Rightarrow 9 \mid y^2 - 60 \Rightarrow y^2 \equiv 60 (\text{mod} 9) \Rightarrow y^2 \equiv 6 (\text{mod} 9)$, pero los residuos cuadráticos en módulo 9 son 0, 1, 4 y 7, por lo que hemos llegado a una contradicción, con lo que hemos terminado la demostración.

Solución 3:
Al igual que en la solución 1 se resolverá por reducción al absurdo, y así mismo se obtiene que debería cumplirse que

$$\begin{aligned} & y^2 = 9x^2 + 90x + 285 \\ \iff & y^2 = \left(9x^2 + 90x + 225\right) + 60 \\ \iff & y^2 = (3x + 15)^2 + 60 \\ \iff & 60 = y^2 - (3x + 15)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

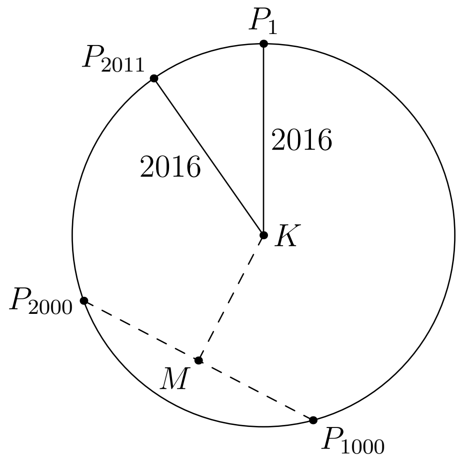
De esta manera se puede afirmar que $y > 3x+15$, es decir que $y \geq 3x+16$, pero además como $y^2-(3x+15)^2 = 60$ entonces y y $3x + 15$ deben tener la misma paridad para que su diferencia sea par, entonces $y \geq 3x + 17$, por lo que

$$\begin{aligned} y^2 - (3x + 15)^2 &\geq (3x + 17)^2 - (3x + 15^2) \\ &\geq (3x + 17 - 3x - 15)(3x + 17 + 3x + 15) \\ &\geq (2)(6x + 32) \\ &\geq 12x + 64 \end{aligned}$$

Como $x \in \mathbb{Z}^+$ entonces $12x + 64 > 60$ por lo que $y^2 - (3x + 15)^2 > 60$, pero por (1) se tendrá entonces que $60 > 60$ lo cual es un absurdo, de esta manera hemos llegado a la contradicción que permite concluir con la demostración.

Problema 3. Sea $P_1P_2\dots P_{2016}$ un polígono concíclico de 2016 lados. Sea K un punto en el interior del polígono y sea M el punto medio del segmento $P_{1000}P_{2000}$. Sabiendo que $KP_1 = KP_{2011} = 2016$ y KM es perpendicular a $P_{1000}P_{2000}$, hallar la longitud del segmento KP_{2016}.

Solución: Existen dos casos para el problema:
Caso 1: $P_{1000}P_{2000} \nparallel P_1P_{2011}$.



Lema 1. Es bien conocido que la mediatriz de un segmento se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Lema 2. El centro de una circunferencia siempre es un punto equidistante a cualquier punto que pertenezca a la circunferencia, por ende, el centro pertenece a la mediatriz de cualquier cuerda.

En nuestro problema, como $KP_1 = KP_{2011}$, por nuestro *Lema 1*, K pertenece a la mediatriz de P_1P_{2011}, análogamente como KM es perpendicular a $P_{1000}P_{2000}$ y M es el punto medio de $P_{1000}P_{2000}$, por nuestro *Lema 1*, K pertenece a la mediatriz de $P_{1000}P_{2000}$. Sabemos que dos rectas se intersecan en a lo mucho un punto, y K es la intersección de las mediatrices de P_1P_{2011} y $P_{1000}P_{2000}$, pero por nuestro *Lema 2*, esas dos mediatrices se deben intersecar en el centro de la circunferencia que pasa por los puntos, P_1, P_{2011}, P_{1000}, P_{2000} (por datos del problema, es la misma que pasa por los 2016 puntos $P_1, P_2, \dots, P_{2016}$). Concluimos entonces que K es el centro de aquella circunferencia y por lo tanto $KP_{2016} = 2016$.

Caso 2: $P_{1000}P_{2000} \parallel P_1P_{2011}$.
En este caso KM será mediatriz de $P_{1000}P_{2000}$ y de P_1P_{2011}, luego la recta KM determina un diámetro de la circunferencia por lo que K puede ser cualquier punto del diámetro entonces KP_{2016} no tiene un valor fijo.

Problema 4. A continuación se muestran dos sumas, cada una de ellas formada por n sumandos:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$
$$T = 100 + 98 + 96 + 94 + \dots$$

¿Para qué valor de n se cumple que $S = T$?

Solución:

Solución 1:

Como todos los sumandos de T son pares, lo dividimos entre dos:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$
$$\frac{T}{2} = 50 + 49 + 48 + 47 + \dots + (51 - n)$$

De ahi es facil ver que:

$$S + \frac{T}{2} = 51n,$$

y como queremos que $S = T$, al reemplazar obtenemos $\frac{3S}{2} = 51n$. Pero es claro que $S = \frac{n(n+1)}{2}$, entonces:

$$\frac{3S}{2} = \frac{3n(n+1)}{4} = 51n \to n + 1 = 68 \to n = 67$$

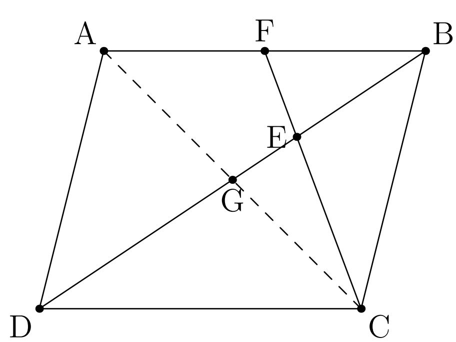
Solución 2:

Veamos que $S = \frac{n(n+1)}{2}$ y que $T = \frac{n}{2}(2 \cdot 100 + (n-1)(-2))$, esto haciendo uso de las fórmulas de progresiones aritméticas, entonces se busca que

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)}{2} &= \frac{n}{2}(2 \cdot 100 + (n-1)(-2)) \\
\iff n + 1 &= 2 \cdot 100 + (n-1)(-2) \\
\iff n + 1 &= 200 - 2n + 2 \\
\iff n + 1 &= 202 - 2n \\
\iff 3n &= 201 \\
\iff n &= \frac{201}{3} = 67
\end{aligned}$$

Problema 5. En el paralelogramo $ABCD$, una recta que pasa por C corta a la diagonal BD en E y AB en F. Si F es el punto medio de AB y el área de $\triangle BEC$ es 100, hallar el área del cuadrilátero $AFED$.

Solución: Se traza la recta AC que corta a DB en G.



En $\triangle ABC$, BG y CF son medianas; por lo tanto $FE = \frac{1}{2}(EC)$. Si $(BEC) = 100$ entonces $(EFB) = 50$ ya que comparten la misma altura.

Ahora veamos que $\triangle ABD$ y $\triangle FBC$ tienen la misma altura y $AB = 2(FB)$. Por lo tanto $(ABD) = 2 \cdot (FBC)$, y como $(FBC) = 150$ entonces $(ABD) = 300$.

Entonces tenemos que $(AFED) = (ABD) - (FBE) = 300 - 50 = 250$.

Problema 6. Determinar la cantidad de enteros positivos $N = \overline{abcd}$, con a, b, c, d dígitos no nulos, que satisfacen

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) = 2abcd - 1$$

Solución: *Lema.* Sean a y b enteros positivos, entonces $(2a-1)(2b-1) \geq 2ab - 1$ y la igualdad se cumple si y solo si $a = 1$ o $b = 1$.
Prueba. Sean a y b enteros positivos. Veamos que:

$$\begin{aligned}
&(2a-1)(2b-1) \geq 2ab - 1 \\
\iff\ & 4ab - 2a - 2b + 1 \geq 2ab - 1 \\
\iff\ & 2ab - 2a - 2b + 1 \geq 0 \\
\iff\ & 2(a-1)(b-1) \geq 0,
\end{aligned}$$

Lo cual es cierto y claramente la igualdad se cumple cuando $a = 1$ o $b = 1$.
Aplicando el lema tenemos que:

$$\begin{aligned}
(2a-1)(2b-1) &\geq 2ab - 1 \\
(2c-1)(2d-1) &\geq 2cd - 1.
\end{aligned}$$

Ademas, también se cumple que $(2ab-1)(2cd-1) \geq 2abcd - 1$. Luego, tenemos que

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geq 2abcd - 1$$

y la igualdad se cumple cuando los tres casos de igualdad de las desigualdades anteriores se cumplen, es decir, cuando $ab = 1$ o $cd = 1$, $a = 1$ o $b = 1$ y $c = 1$ o $d = 1$; lo que es equivalente a que tres de los números a, b, c, d sean iguales a 1. Finalmente los números $\overline{abcd}$ que satisfacen dicha condición son:

$$1111, \overline{a111}, \overline{1b11}, \overline{11c1}, \overline{111d}$$

(con $a, b, c, d \neq 1$), que en total son $1 + 8 \times 4 = 33$ números.