Olimpiada Nacional de Matemática 2016

Fase Final - Nivel 3

Criterios de calificación

Problema 1.

Solución 1:

- Llegar a que $y^2 = 3(3x^2 + 30x + 95)$ .... (1 punto)
- Demostrar que 3 divide a y^2 .... (2 puntos)
- Demostrar que 9 divide y^2 .... (1 punto)
- Llegar a que 3 debe dividir a 95 .... (2 puntos)
- Concluir el problema .... (1 punto)

Solución 2:

- Llegar a que $9x^2 + 90x + 285 - y^2 = 0$ .... (1 punto)
- Plantear la ecuación general de la cuadrática.......... (1 punto)
- Demostrar que $3 \mid \sqrt{y^2 - 60}$ .... (1 punto)
- Demostrar que $9 \mid y^2 - 60$ .... (1 punto)
- Determinar que $y^2 \equiv 60 (\mathrm{mod} 9)$ .... (2 puntos)
- Concluir el problema .... (1 punto)

Solución 3:

- Llegar a que $60 = y^2 - (3x + 15)^2$ .... (1 punto)
- Demostrar que $y > 3x + 17$ .... (2 puntos)
- Demostrar que $y^2 - (3x + 15)^2 > 60$ .... (3 puntos)
- Concluir el problema .... (1 punto)

Problema 2.

Solución 1:

- Indicar que los vértices se dividen en dos conjuntos .... (1 punto)
- Indicar que $a + b = 2017$.......... (1 punto)
- Indicar que a o b es par.......... (1 punto)
- Afirmar que la recta sólo corta a las diagonales que se forman uniendo puntos de un conjunto con los del otro conjunto .... (2 puntos)
- Restar 2 de ab.......... (1 punto)
- Concluir que $ab - 2$ es par .... (1 punto)

- No acumulable:
  - Decir que si la recta l intersecta a dos lados consecutivos entonces intersecta a 2014 diagonales, o cualquier otro caso particular sobre el mismo polígono de 2017 vértices ....(1 punto)

Solución 2:

- Indicar que los vértices se dividen en dos conjuntos .... (1 punto)
- Indicar que, de 2014 diagonales que salen de cada vértice, solo las que cruzan de un conjunto a otro cortan a la recta ....(2 puntos)
- Mencionar la cuenta de las diagonales que salen de cada vértice en un conjunto .... (1 punto)
- Mencionar el descuento del doble de las diagonales que se quedan en el mismo semiplano .....(2 puntos)
- Concluir que la resta de las dos cuentas anteriores es par ....(1 punto)

Problema 3.
Solución 1:

- APC y MPQ son congruentes ....(1 punto)
- MPQ es el resultado de rotar 60º al triángulo APC .... (1 punto)
- Las rectas MQ y AD forman un ángulo de 60º .... (1 punto)
- Demostrar que NQM y NDB son congruentes .... (2 puntos)
- NDB es el resultado de rotar 60º al triángulo NQM .... (1 punto)
- NBM es equilátero, $\angle MBN = 60º$ ....(1 punto)
- No acumulable:
  - Solución completa para una configuración específica.....................................(4 puntos)

Solución 2 (Por geometría analítica):

- Solución completa .... (7 puntos)
- Si existe al menos un error de cualquier tipo .... (0 puntos)

Problema 4.

- Construir AC y denotar la intersección de AC con DB .... (2 puntos)
- Demostrar que $(EFB) = 50$ .... (2 puntos)
- Llegar a que $(ABD) = 300$ .... (2 puntos)
- Concluir que $(FBE) = 250$ ....(1 punto)

Problema 5.

- Demostrar que $(2a − 1)(2b − 1) \geq 2ab − 1$ con su caso de igualdad .... (2 puntos)

- Demostrar que $(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geq 2abcd-1$ con su caso de igualdad .... (2 puntos)
- Determinar la forma de los números $\overline{1111}$,$\overline{a111}$,$\overline{1b11}$,$\overline{11c1}$,$\overline{111d}$ .... (2 puntos)
- Calcular la cantidad de números adecuadamente .... (1 punto)

Problema 6.

- Considerar c_i del conjunto $0, 1$, hay 2^n valores para S .... (1 puntos)
- Por el principio de las casillas debemos tener que $n^3 \geq 2^n - 1$ .... (3 puntos)
- Decir que n es a lo mucho 9 .... (1 punto)
- Construir ejemplo para 9 y concluir .... (2 puntos)