Olimpiada Nacional de Matemática 2016

Fase Final - Nivel 3

Soluciones

Problema 1. Demostrar que no existen enteros positivos x, y tales que:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+9)^2 = y^2$$

Solución:

Solución 1:

Se procederá por reducción al absurdo, supongamos que sí existen dichos enteros. Tenemos que:

$$\begin{aligned} y^2 &= (x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+9)^2 \\ &= 9x^2 + 2(1+2+3+\ldots+9)x + (1^2+2^2+\ldots+9^2) \\ &= 9x^2 + 2\left(\frac{9\cdot 10}{2}\right)x + \frac{9\cdot 10\cdot 19}{6} \\ &= 3(3x^2+30x+95) \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$3 \mid y^2 \Rightarrow 3 \mid y \Rightarrow 3^2 \mid y^2 \Rightarrow 3^2 \mid 3(3x^2+30x+95) \Rightarrow 3 \mid 3x^2+30x+95 \Rightarrow 3 \mid 95$$

Pero esto último es una contradicción, pues 95 no es múltiplo de 3, por lo que hemos terminado la demostración.

Solución 2:

Al igual que en la solución 1 se resolverá por reducción al absurdo, y así mismo se obtiene que debería cumplirse que $y^2 = 9x^2 + 90x + 285$.

Lo anterior se cumple si y sólo si

$$9x^2 + 90x + 285 - y^2 = 0$$

Entonces esta ecuación debe tener soluciones enteras, por lo que

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-90 \pm \sqrt{8100 - 36(285-y^2)}}{2(9)} \\ &= -5 \pm \frac{\sqrt{-2160+36y^2}}{18} \\ &= -5 \pm \frac{6\sqrt{y^2-60}}{18} \\ &= -5 \pm \frac{\sqrt{y^2-60}}{3} \end{aligned}$$

Entonces $3 \mid \sqrt{y^2-60} \Rightarrow 9 \mid y^2 - 60 \Rightarrow y^2 \equiv 60(\text{mod} 9) \Rightarrow y^2 \equiv 6(\text{mod} 9)$, pero los residuos cuadráticos en módulo 9 son 0, 1, 4 y 7, por lo que hemos llegado a una contradicción, con lo que hemos terminado la demostración.

Solución 3:
Al igual que en la solución 1 se resolverá por reducción al absurdo, y así mismo se obtiene que debería cumplirse que

$$\begin{aligned} & y^2 = 9x^2 + 90x + 285 \\ \iff & y^2 = \left(9x^2 + 90x + 225\right) + 60 \\ \iff & y^2 = (3x + 15)^2 + 60 \\ \iff & 60 = y^2 - (3x + 15)^2 \end{aligned} \tag{1}$$

De esta manera se puede afirmar que $y > 3x+15$, es decir que $y \geq 3x+16$, pero además como $y^2-(3x+15)^2 = 60$ entonces y y $3x + 15$ deben tener la misma paridad para que su diferencia sea par, entonces $y \geq 3x + 17$, por lo que

$$\begin{aligned} y^2 - (3x + 15)^2 &\geq (3x + 17)^2 - (3x + 15^2) \\ &\geq (3x + 17 - 3x - 15)(3x + 17 + 3x + 15) \\ &\geq (2)(6x + 32) \\ &\geq 12x + 64 \end{aligned}$$

Como $x \in \mathbb{Z}^+$ entonces $12x + 64 > 60$ por lo que $y^2 - (3x + 15)^2 > 60$, pero por (1) se tendrá entonces que $60 > 60$ lo cual es un absurdo, de esta manera hemos llegado a la contradicción que permite concluir con la demostración.

Problema 2. Se trazan todas las diagonales en un polígono convexo de 2017 lados. Una recta l interseca a dicho polígono pero no pasa por ninguno de sus vértices. Demostrar que la recta l interseca a un número par de diagonales de dicho polígono.

Solución:
Solución 1:
Notemos que ya que la recta l no pasa por ninguno de los vértices, entonces dividirá el plano en dos conjuntos de puntos A y B, con $|A| = a$ y $|B| = b$ cantidad de puntos en cada semiplano donde $a + b = 2017$. Ésto implica que exactamente uno de los dos, a o b es par. La recta l corta a cada segmento que une un punto de A con un punto de B. En total hay ab segmentos que la recta l corta. De estos ab segmentos, todos son diagonales excepto por dos de ellos, que son lados del polígono. Por lo tanto hay $ab - 2$ diagonales que la recta l corta, y ya que a o b es par, entonces $ab - 2$ también será par.

Solución 2:
Como la recta l no pasa por vértices entonces corta a dos lados en su interior y por tanto separa al polígono dejando una cantidad de vértices en una región y el resto en la otra región.

Sabemos que de cada vértice salen 2014 diagonales, de las cuales, las que van de un semiplano (el plano dividido por l) a otro serán cortadas por la recta l. De modo que, para contar las que se cruzan se pueden contar todas las diagonales que salen de los vértices en un semiplano de la recta l, esta cuenta tiene la forma $2014x$, luego se debe descontar el doble de las diagonales que se queden en el mismo semiplano, porque contando todas las diagonales que salen de cada vértice, estas son contadas dos veces, esta cuenta tiene la forma $2y$, por lo que el número de diagonales que son intersectadas por la recta l es $2014x - 2y$ que evidentemente es par.

Problema 3. Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos sobre una recta L, de tal modo que $AB = BC = CD$. En uno de los semiplanos determinados por la recta L, se eligen los puntos P y Q de tal manera que el triángulo CPQ es equilátero con sus vértices nombrados en sentido horario. Sean M y N dos puntos del plano tales que los triángulos MAP y NQD son equiláteros (los vértices también están nombrados en sentido horario). Hallar el valor en grados del ángulo $\angle MBN$.

Solución:

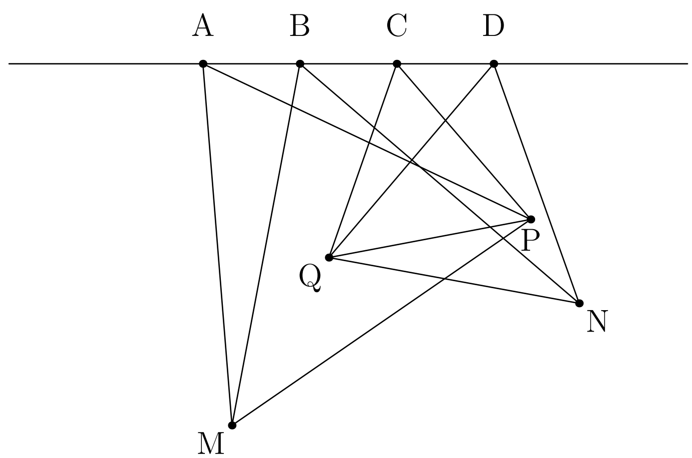
Solución 1:

Recordemos primero algunas propiedades importantes de las rotaciones:

Lema 1. Si un triángulo E_1FG_1 rota un ángulo α alrededor del vértice F, obteniéndose de esta forma el triángulo E_2FG_2, entonces el ángulo que forman las rectas E_1G_1 y E_2G_2 es α.

Lema 2. Si un triángulo E_1FG_1 rota 60^{o} alrededor de F, obteniéndose de esta forma el triángulo E_2FG_2, entonces el triángulo E_1FE_2 es equilátero. Lo mismo sucede con el triángulo G_1FG_2.

Ahora, trabajaremos en el problema. Usaremos ángulos dirigidos módulo 180^{o}.



Como los triángulos APM y CQP son equiláteros y $\measuredangle APC = \measuredangle MPQ$ (ya que $\measuredangle APC = \measuredangle APM + \measuredangle MPC$ y $\measuredangle MPQ = \measuredangle MPC + \measuredangle CPQ$), es fácil notar que los triángulos APC y MPQ son congruentes (por el caso de lado-ángulo-lado), es más, podemos afirmar que el triángulo MPQ es el resultado de rotar 60^{o} el triángulo APC, en consecuencia, por el *Lema 1*, las rectas MQ y AD forman un ángulo de 60^{o}.

Sean $AB = BC = CD = l$, como $AC = 2l$ entonces $MQ = 2l$. Sea $R = MQ \cap AD$. Como $\measuredangle DNQ = \measuredangle QED = 60^{\text{o}}$, los puntos N, D, R y Q son concíclicos. Por tanto $\measuredangle NQM = \measuredangle NQR = \measuredangle NDR = \measuredangle NDA$.

Fijémonos en los triángulos NQM y NDB, tenemos que $NQ = ND$, $\measuredangle NQM = \measuredangle NDA$ y $MQ = BD = 2l$, luego los triángulos NQM y NDB son congruentes, además, como $\angle QND = 60^{\text{o}}$ el triángulo NDB es el resultado de rotar 60^{o} el triángulo NQM. Por *Lema 2* en triángulo NBM es equilátero, con esto concluimos que $\angle MBN = 60^{\text{o}}$.

Solución 2:

Esta solución será por geometría analítica, haciendo uso de los números complejos.

Definamos para todo punto X su complejo como $X = x$, con $x \in \mathbb{C}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que L es el eje real del plano complejo, su origen el punto B y $a = -1$.

Claramente $b = 0$, $c = 1$ y $d = 2$. Como Q es un punto cualquiera del plano entonces sea $Q = q$ con $q \notin \mathbb{R}$. Sea $\epsilon = \cos(60^{\text{o}}) + i\,\text{sen}(60^{\text{o}})$, entonces $\overline{\epsilon} = \cos(-60^{\text{o}}) + i\,\text{sen}(-60^{\text{o}})$ y $\epsilon\overline{\epsilon} = 1$.

Veamos que $p = (q-1)\epsilon + 1$, luego $m = (p+1)\overline{\epsilon} - 1 = ((q-1)\epsilon + 2)\,\overline{\epsilon} - 1$, así como $n = (q-2)\epsilon + 2$.

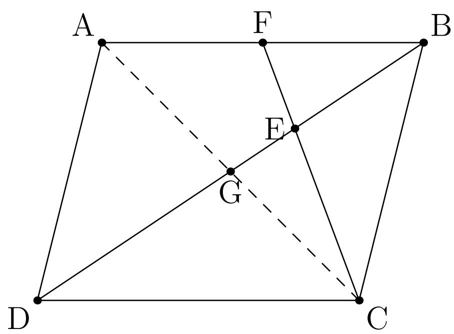
Ahora vamos a demostrar que m es una rotación de n con centro en B y ángulo de -60^{o}, esto ocurre si y sólo si

$$\begin{aligned} n\overline{\epsilon} &= m \\ \iff ((q-2)\epsilon + 2)\,\overline{\epsilon} &= ((q-1)\epsilon + 2)\,\overline{\epsilon} - 1 \\ \iff (q-2)\,\epsilon\overline{\epsilon} + 2\overline{\epsilon} &= (q-1)\epsilon\overline{\epsilon} + 2\overline{\epsilon} - 1 \\ \iff q - 2 + 2\overline{\epsilon} &= q - 1 + 2\overline{\epsilon} - 1 \end{aligned}$$

Lo último es evidente que es cierto, con lo que se conluye que el ángulo es 60^{o}.

Problema 4. En el paralelogramo $ABCD$, una recta que pasa por C corta a la diagonal BD en E y AB en F. Si F es el punto medio de AB y el área de $\triangle BEC$ es 100, hallar el área del cuadrilátero $AFED$.

Solución: Se traza la recta AC que corta a DB en G.



En $\triangle ABC$, BG y CF son medianas; por lo tanto $FE = \frac{1}{2}(EC)$. Si $(BEC) = 100$ entonces $(EFB) = 50$ ya que comparten la misma altura.

Ahora veamos que $\triangle ABD$ y $\triangle FBC$ tienen la misma altura y $AB = 2(FB)$. Por lo tanto $(ABD) = 2 \cdot (FBC)$, y como $(FBC) = 150$ entonces $(ABD) = 300$.

Entonces tenemos que $(AFED) = (ABD) - (FBE) = 300 - 50 = 250$.

Problema 5. Determinar la cantidad de enteros postivos $N = \overline{abcd}$, con a, b, c, d dígitos no nulos, que satisfacen

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) = 2abcd - 1$$

Solución: *Lema.* Sean a y b enteros positivos, entonces $(2a-1)(2b-1) \geq 2ab-1$ y la igualdad se cumple si y solo si $a = 1$ o $b = 1$.
Prueba. Sean a y b enteros positivos. Veamos que:

$$\begin{aligned} (2a-1)(2b-1) &\geq 2ab-1 \\ \iff 4ab - 2a - 2b + 1 &\geq 2ab - 1 \\ \iff 2ab - 2a - 2b + 1 &\geq 0 \\ \iff 2(a-1)(b-1) &\geq 0, \end{aligned}$$

Lo cual es cierto y claramente la igualdad se cumple cuando $a = 1$ o $b = 1$.
Aplicando el lema tenemos que:

$$(2a-1)(2b-1) \geq 2ab-1$$
$$(2c-1)(2d-1) \geq 2cd-1.$$

Ademas, también se cumple que $(2ab-1)(2cd-1) \geq 2abcd-1$. Luego, tenemos que

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geq 2abcd-1,$$

y la igualdad se cumple cuando los tres casos de igualdad de las desigualdades anteriores se cumplen, es decir, cuando $ab = 1$ o $cd = 1$, $a = 1$ o $b = 1$ y $c = 1$ o $d = 1$; lo que es equivalente a que tres de los números a, b, c, d sean iguales a 1. Finalmente los números $\overline{abcd}$ que satisfacen dicha condición son:

$$1111, \overline{a111}, \overline{1b11}, \overline{11c1}, \overline{111d}$$

(con $a, b, c, d \neq 1$), que en total son $1 + 8 \times 4 = 33$ números.

Problema 6. Un entero positivo n es *"olímpico"* si existen n enteros no negativos $x_1, x_2, ..., x_n$ que cumplen que:

- Existe al menos un entero positivo $j : 1 \leq j \leq n$ tal que $x_j \neq 0$.
- Para cualquier manera de escoger n números $c_1, c_2, ..., c_n$ del conjunto $\{-1, 0, 1\}$, donde no todos los c_i son iguales a cero, se cumple que la suma $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ no es divisible para n^3.

Hallar el mayor entero positivo *"olímpico"*.

Solución: Consideremos los valores de S $= c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ cuando c_i se escogen del conjunto $\{0, 1\}$. S no puede ser un múltiplo de n^3. Hay $2^n - 1$ valores posibles para S (sin incluir el caso en el que todos los c_i son 0). Si hay dos valores iguales, podemos restarlos entre ellos y obtener $0 = S' = c_1'x_1 + c_2'x_2 + ... + c_n'x_n$ donde los c_i' pueden ser también -1. Por el principio de las casillas debemos tener que $n^3 \geq 2^n - 1$. Por lo tanto n es a lo mucho 9. Es fácil ver que $(x_1, x_2, x_3, ..., x_9) = (1, 2, 4, ..., 256)$ es una construcción válida para $n = 9$ por lo tanto el mayor entero positivo *olímpico* es 9.