Olimpiada Nacional de Matemática 2016

Fase Final - Nivel U

Soluciones

Problema 1. Sea P un polinomio con coeficientes complejos de grado 3. Se sabe que dos de sus raíces están ubicadas en dos puntos fijos distintos A, B en el plano complejo. Si la tercera raíz se mueve sobre una recta fija r en el plano complejo, demostrar que el lugar geométrico de la raíz de la segunda derivada de P es una recta paralela a r en el plano complejo.

Solución: Sean a, b los números complejos representados por A y B en el plano complejo. Sea Z un punto sobre la recta r, que representa al número complejo z. Sea $P(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ el polinomio considerado. Luego $P"(x) = 6px + 2q$, y por ende la raíz y de $P"$ cumple $y = \frac{-2q}{6p} = -\frac{q}{3p}$. El teorema de Viéte asegura que $a + b + z = -\frac{q}{p}$, por tanto $y = \frac{a+b+z}{3}$, y se concluye que la raíz de la segunda derivada es el centroide del triángulo formado por la raíces del polinomio original.
Sea M el punto medio del segmento AB, entonces la raíz y es tal que divide al segmento ZM en una razón constante $\frac{ZY}{YM} = 2$, como Z se mueve sobre la recta r, entonces por el teorema de Tales Y se mueve por una recta paralela a r. Se concluye que el lugar geométrico de la raíz de la segunda derivada de P es una recta paralela a r en el plano complejo.
Nota: La segunda parte se puede trabajar algebraicamente considerando una expresión adecuada para r.

Problema 2. Para cada entero positivo con n^2 dígitos decimales, se asocia el determinante de la matriz obtenida al escribir sus dígitos en orden siguiendo las filas. Por ejemplo para $n = 2$, el entero 2016 se asocia con

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = 12$$

Hallar, como función de n, la suma de todos los determinantes asociados con los enteros positivos de n^2 dígitos.
Nota: El primer dígito tiene que ser diferente de 0, por ejemplo para $n = 2$, hay 9000 determinantes.

Solución: Denotemos por $f(m)$ el número asociado con el número m. Por ejemplo $f(2016) = 12$. Los determinantes poseen la propiedad de que si dos matrices tienen todas sus filas (o columnas) iguales a excepción de una, entonces el determinante de la suma es igual a la suma de los determinantes.
Considerando todos los números de n^2 dígitos, éstos se pueden subdividir en grupos de 10^n números tales que los primeros $n^2 - n$ dígitos son iguales, y por ende la suma de los números $f(m)$ es igual al determinante de la suma dentro de cada grupo. Como cada grupo tiene la misma cantidad de números, entonces la última fila es la misma para cada uno de estos grupos. Se repite el proceso con n dígitos siguientes, y así sucesivamente hasta tener un sólo determinante.
Si $n = 1$, entonces el resultado es igual a la suma de los números del 1 al 9, es decir 45. Si $n = 2$, entonces el resultado es igual al determinante

$$\det \begin{bmatrix} 450 & 405 \\ 450 & 450 \end{bmatrix} = 20250$$

Si $n \geq 3$, entonces las dos últimas filas de este determinante de la suma son iguales y por tanto el determinante es igual a 0.
Nota: Para $n \geq 3$, si las dos últimas columnas son iguales, entonces el determinante es 0. Si las dos últimas columnas son distintas, cambiar el orden implica multiplicación por -1, luego esta matriz se cancela con aquella que tiene las otras columnas iguales y las dos columnas intercambiadas. Por ende, se concluye que la suma es

0. Para $n = 2$, se utiliza este argumento para reducir el número de determinantes y trabajar directamente con las restantes (que tienen 0 en la esquina superior derecha).

Problema 3. Demostrar que:

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} dt$$

converge y hallar su valor.

Solución: Definamos I a la integral pedida. Luego

$$I = \lim_{a\to\infty} \int_{\frac{1}{a}}^{a} t^{-\frac{1}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} dt$$

$$I = \lim_{a\to\infty} \left(\int_{\frac{1}{a}}^{1} t^{-\frac{1}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} dt + \int_1^a t^{-\frac{1}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} dt \right)$$

La primera integral está acotada por el término $t^{\frac{1}{2}}$ en su intervalo de soporte, y la segunda integral está acotada por el término e^{-2016t} en su intervalo de soporte. Como ambas cotas convergen en sus respectivos intervalos, se tiene que la integral necesariamente converge.
Se hace la sustitución $\frac{1}{t}$ por t en la primera integral, luego

$$\lim_{a\to\infty} \int_{\frac{1}{a}}^{1} t^{-\frac{1}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} dt = \lim_{a\to\infty} \int_a^1 t^{\frac{1}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} \frac{-1}{t^2} dt$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_1^a t^{\frac{-3}{2}} e^{-2016(t+t^{-1})} dt$$

$$I = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \left(t^{-\frac{1}{2}} + t^{-\frac{3}{2}} \right) e^{-2016(t+t^{-1})} dt$$

Finalmente se hace la substitución $u = 2016^{0.5} \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{-1}{2}} \right)$ y se tiene que

$$I = 2(2016)^{-0.5} \lim_{a\to\infty} \int_0^{2016^{0.5}\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{-1}{2}}\right)} e^{-u^2-4032} du$$

$$I = 2(2016)^{-0.5} e^{-4032} \lim_{a\to\infty} \int_0^{2016^{0.5}\left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{-1}{2}}\right)} e^{-u^2} du$$

$$I = 2(2016)^{-0.5} e^{-4032} \int_0^\infty e^{-u^2} du = 2(2016)^{-0.5} e^{-4032} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I = e^{-4032} \sqrt{\frac{\pi}{2016}}$$

Problema 4. Hallar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)}$$

Solución: Sea

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)}$$

Es fácil comprobar que

$$\frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)} = \frac{2^n}{3^n-2^n} - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}$$

Luego por la propiedad telescópica de la suma se tiene que

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} (\frac{2^n}{3^n-2^n} - \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}) = \frac{2^1}{3^1-2^1} - \frac{2^{N+1}}{3^{N+1}-2^{N+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)} = \lim_{N\to\infty} (2 - \frac{2^{N+1}}{3^{N+1}-2^{N+1}})$$

$$= 2 - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1.5^{N+1}-1} = 2$$

ya que $\lim_{N\to\infty} a^N = \infty$ si $a > 1$.
Nota: Alternativamente se puede usar que

$$\frac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)} = \frac{3^n}{3^n-2^n} - \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}-2^{n+1}}$$

y el hecho que $\lim_{N\to\infty} a^N = 0$ si $-1 < a < 1$

Problema 5. Varios niños están jugando al teléfono. El niño C_0 susurra 3 palabras al niño C_1, que susurra lo que escuchó al niño C_2 y así sucesivamente hasta que el mensaje llega al niño C_n. Cada una de las 3 palabras tiene exactamente una palabra *"gemela"*, es decir que los niños pueden confundirlas.
Cada niño $i+1$ tiene la probabilidad de $\frac{1}{2}$ de oír correctamente lo que el niño i dijo, tiene $\frac{1}{6}$ de probabilidad de cambiar la primera palabra dicha por el niño i por su *"gemela"*, $\frac{1}{6}$ de probabilidad de cambiar la segunda palabra y $\frac{1}{6}$ de probabilidad de cambiar la tercera palabra. Note que nunca se cambia más de una palabra y que el mensaje puede ser accidentalmente corregido.
Calcular la probabilidad de que el niño C_n escuche exactamente el mensaje original.

Solución: Definimos: a_n la probabilidad de que hasta el paso n el mensaje sea correcto, b_n la probabilidad de que hasta el paso n haya exactamente una palabra incorrecta, c_n la probabilidad de que hasta el paso n haya exactamente dos palabras incorrectas y d_n la probabilidad de que hasta el paso n todas las palabras estén incorrectas. Obviamente $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ para todo n
Las siguientes recurrencias son obvias debido a la simetría del problema

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{6}b_{n-1}$$

$$b_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-1}$$

$$c_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} + \frac{1}{3}b_{n-1}$$

$$d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{6}c_{n-1}$$

Ahora definamos $x_n = a_n + d_n$ e $y_n = b_n + c_n$, obviamente $x_n + y_n = 1$. Por tanto se tiene que

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{6}y_{n-1}$$

$$y_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{5}{6}y_{n-1}$$

Luego se tiene que

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{6}(1 - x_{n-1}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x_{n-1}$$

Junto con $x_0 = 1$, se concluye que $x_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ para todo $n \geq 0$.
Ahora definamos $s_n = a_n - d_n$ y $t_n = b_n - c_n$. Por tanto se tiene que

$$s_n = \frac{1}{2}s_{n-1} + \frac{1}{6}t_{n-1}$$

$$t_n = \frac{1}{2}s_{n-1} + \frac{1}{6}t_{n-1}$$

Obviamente $s_n = t_n$, luego se tiene que $s_n = \frac{1}{3}s_{n-1}$, junto con $s_1 = \frac{1}{2}$, se concluye que $s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Finalmente, se tiene que para $n \geq 1$

$$a_n = \frac{x_n + s_n}{2} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Nota: Hay varias alternativas para resolver las recurrencias, por ejemplo se puede considerar el sistema de primer orden de ecuaciones en diferencias y hallar los eigenvalores y eigenvectores de la matriz que describe el sistema y usar las condiciones iniciales.

Problema 6. Sea F un campo de p^2 elementos donde p es un primo impar. Se asume que existe un conjunto S con $\frac{p^2-1}{2}$ elementos distintos y no nulos pertenecientes a F con la propiedad: para todo $a \neq 0$ en F, exactamente uno de los números a y $-a$ pertenece a S. Sea N el número de elementos en la intersección $S \cap \{2a : a \in S\}$. Demostrar que N es par.

Solución: Denotemos $2S = \{2a : a \in S\}$ y $\#S$ el cardinal del conjunto S. De las condiciones dadas, para todo $a \in S$, se puede escribir de forma única $2a = s_a x_a$ con $s_a \in S$ y $x_a \in \{-1, 1\}$. Luego se concluye que $S \cap 2S = \{a \in S : x_a = 1\}$.
Consideremos el producto de x_a para todos los elementos de S, luego tenemos que $\prod_{a\in S} x_a = (-1)^{\#S-N}$. Como p es un impar $p^2 - 1$ es divisible para 4, y por tanto $\#S$ es par, de donde se concluye que $\prod_{a\in S} x_a = (-1)^N$.
Por otro lado, en F se tiene que

$$2^{\frac{p^2-1}{2}} \prod_{a\in S} a = \prod_{a\in S} 2a = \prod_{a\in S} s_a x_a = \prod_{a\in S} x_a \prod_{a\in S} s_a = (-1)^N \prod_{a\in S} a$$

Por tanto $2^{\frac{p^2-1}{2}} = (-1)^N$ ya que $a \neq 0$ para todo $a \in S$. Finalmente, el pequeño teorema de Fermat asegura que $2^{p-1} = 1$, y por ende $2^{\frac{p^2-1}{2}} = \left(2^{p-1}\right)^{\frac{p+1}{2}} = 1$ pues $\frac{p+1}{2}$ es un entero. Se concluye que $(-1)^N = 1$ y por ende N es par.