LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2014/Dic/15

Nivel 1

Determinar cuántos números enteros positivos menores que 900 son múltiplos de 7 y terminan en 7.

Solución:

Primero veamos que el 777 es múltiplo de 7 y termina en 7. Además observemos que para obtener otro número que termine con el mismo dígito se debe sumar/restar 10 unidades a dicho número, también hay que observar que para obtener otro múltiplo de 7 sumando 10 unidades es necesario sumar 7 veces el número 10, así se obtiene que luego de 70 unidades se obtendrá otro múltiplo de 7 y que tenga el mismo dígito de las unidades, con esto se procede de la siguiente manera para concluir el problema: $777+70=847$; $847+70=917$ (no es menor que 900), y restando 70 se obtienen: $777-70=707$; $707-70=637$; $637-70=567$; $567-70=497$; $497-70=427$; $427-70=357$; $357-70=287$; $287-70=217$; $217-70=147$; $147-70=77$; $77-70=7$

Y con esto se obtienen 13 números que cumplen.

Nivel 2

Sea f una función real de variable real que cumple que $f(x)+2f\left(\frac{2002}{x}\right)=3x$ para todo $x>0$. Determinar $f(2)$.

Solución:

Reemplacemos $x=2$ en la ecuación dada, entonces se obtiene

$$f(2)+2f\left(\frac{2002}{2}\right)=3(2) \Rightarrow f(2)+2f(1001)=6$$

Análogamente reemplazando con 1001 se obtiene

$$f(1001)+2f\left(\frac{2002}{1001}\right)=3(1001) \Rightarrow f(1001)+2f(2)=3003$$

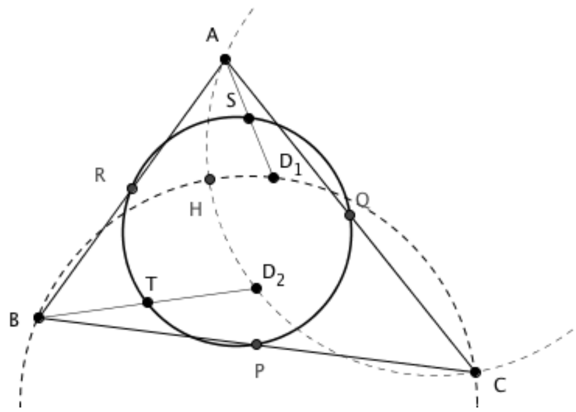
y así se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} f(2)+2f(1001)=6 \\ f(1001)+2f(2)=3003 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2)+2f(1001)=6 \\ 2f(1001)+4f(2)=6006 \end{cases}$$

restando la segunda ecuación con la primera se obtiene $3f(2)=6000 \Rightarrow f(2)=\boxed{2000}$.

Nivel 3
En el plano se encuentran cuatro puntos distintos, no habiendo tres colineales. Estos cuatro puntos forman seis segmentos distintos. Demostrar que si cinco de los seis puntos medios de estos segmentos se encuentran en una misma circunferencia, entonces el sexto punto medio se encuentra también en esta circunferencia.

Solución:
Sean A,B,C,D los cuatro puntos definidos en el enunciado, y sean P,Q,R,S,T los cinco puntos medios de los segmentos que se encuentran sobre una misma circunferencia. Sea, sin pérdida de generalidad P el punto medio de BC, Q el punto medio de CA y R el punto medio de AB, mientras que S es el punto medio de AD y T es el punto medio de BD.



Los puntos A,B,C forman un triángulo, y es conocido que los puntos medios de sus lados yacen sobre la circunferencia de los nueve puntos del mismo, por lo tanto, S y T deben pertenecer también a esta circunferencia.

Se observa fácilmente que al variar la posición de S sobre la circunferencia de los nueve puntos, el punto D varía describiendo una circunferencia homotética de razón 2 con respecto a la primera, la cual pasa por los puntos B , C y es conocido también que pasa por el ortocentro H de ABC (ya que el punto medio entre un vértice y el ortocentro del triángulo yace sobre la circunferencia de los nueve puntos). Se denota esta variación de D en el gráfico como D_1. Análogamente, al variar T sobre la circunferencia de los nueve puntos, D se mueve a lo largo de una circunferencia a la cual pertenecen A, C y H. Se denota esta variación de D en el gráfico como D_2. Como la unicidad de D requiere que $D_1 \equiv D_2$, entonces necesariamente se tiene que $D \equiv H$ (la otra opción es $D \equiv C$, lo que no cumple las condiciones del problema).
Por lo tanto, el punto medio del segmento CD (el sexto punto medio) también pertenecerá a la circunferencia de los nueve puntos, ya que es el punto medio del segmento que une el vértice C con H.

Nivel U
La función $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ es contínua y derivable. Si se conoce que $f(0)=0$, $f'(0)=a$ y que $f(x+1)=e^{f(x)}$ para todo $x>-1$. Determinar $f'(3)$.

Solución:
Como $f(x+1)=e^{f(x)} \Rightarrow f'(x+1)=f'(x)\bullet e^{f(x)}$.
Entonces se obtiene $f(1)=e^{f(0)}=e^0=1$ y $f'(1)=f'(0)\bullet e^{f(0)}=a\bullet e^0=a$.
Luego se tiene $f(2)=e^{f(1)}=e^1=e$ y $f'(2)=f'(1)\bullet e^{f(1)}=a\bullet e^1=ae$.
Y finalmente $f'(3)=f'(2)\bullet e^{f(2)}=ae\bullet e^e=\boxed{ae^{e+1}}$.