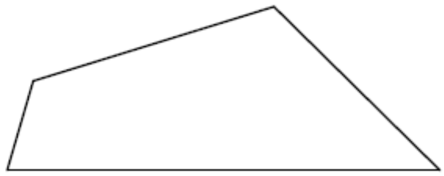
Olimpiada Matemática Ecuatoriana

LISTA SEMANAL
Soluciones

Fecha:
2014/Dic/22

Nivel 1

De un cuadrilátero de papel como el de la figura, hay que recortar un nuevo cuadrilátero cuya área sea igual a la mitad del área del cuadrilátero original. Solo se puede doblar una o más veces y cortar por algunas de las líneas de los dobleces.
Describir los dobleces y los cortes y justificar que el área es la mitad.



Solución:
Primero, se marcan con doblez los puntos medios de dos lados opuestos uniendo los respectivos pares de vértices que los forman. Luego, se dobla el papel uniendo cada punto medio marcado con uno de los vértices del lado que se le opone sin que se crucen las dobleces. Éstas dos dobleces son las líneas por dónde se debe cortar para formar el nuevo cuadrilátero con área igual a la mitad del cuadrilátero original.

El área del cuadrilátero resultante es igual a la mitad del área del original puesto que las dobleces finales corresponden a las medianas de los triángulos que forma una diagonal del cuadrilátero. Al cortarse en ellas, las áreas de cada triángulo se reducen a la mitad, reduciendo a la mitad la suma de sus áreas que es igual al área del cuadrilátero original. Recordemos que una mediana divide a un triángulo en otros triángulos cuyas áreas son iguales entre sí e igual a la mitad del triángulo original.

Nivel 2

Alrededor de una mesa redonda están sentados representantes de n países ($n \geq 2$), de modo que satisfacen la siguiente condición: si dos personas son del mismo país, entonces sus respectivos vecinos de la derecha no pueden ser de un mismo país. Determinar para cada n, el número máximo de personas que puede haber alrededor de la mesa.

Solución:
El número máximo de personas es n^2.
Supongamos que hay n^2+1 o más personas, entonces tendremos por lo menos n^2+1 configuraciones de pares, contando para cada persona su país y el país de su vecino de la derecha. Por otro lado, el número de posibles pares diferentes es n^2 (n posibilidades para

cada persona y n posibilidades para el que está a su derecha). Por el principio del palomar, concluimos que hay al menos dos configuraciones idénticas en contradicción con la hipótesis.

Veamos que siempre es posible colocar n^2 personas alrededor de la mesa, de manera que se satisfaga la condición de que haya n personas de cada uno de los n países.

Procedemos por inducción en n. Veremos un algoritmo que permite, a partir de n países, colocar un país más y aumentar en $2n+1$ el número total de personas.

Para $n=2$, notamos que es posible la configuración deseada colocando como vecinos a las dos personas de cada país.

Ahora, describiremos el paso inductivo, a partir de una mesa con n países y n^2 personas, n de cada país. Para cada país i, $1 \le i \le n$, los n vecinos de la derecha de sus n representantes son de países distintos. En particular, para cada país i, $1 \le i \le n$, hay un representante que tiene como vecino de la derecha a alguien de su propio país. Entre estos dos vecinos, ubicamos una persona del país $n+1$ y una persona más, la $(n+1)$-ésima del país i. Al hacer esto, para cada $i=1,\ldots,n$, aumentamos la cantidad total de personas en $2n$. Ahora, cada país $i=1,\ldots,n$ tiene $n+1$ representantes y del país $n+1$ hay n personas. Nuevamente, los $n+1$ vecinos de la derecha de las personas de un mismo país $i=1,\ldots,n$ son de países distintos; los n vecinos de la derecha de las n personas del país $n+1$ son de los países $1,\ldots,n$. Lo único que falta es agregar una persona más del país $n+1$ al lado de cualquier otra persona de su mismo país. Obtenemos una configuración con $n^2+2n+1=(n+1)^2$ personas alrededor de la mesa, con $n+1$ personas de cada uno de los $n+1$ países. Esta configuración satisface la condición del enunciado y se completa la inducción.

Nivel 3

Sean a,b,c reales positivos tales que $a+b+c=3$. Demostrar que

$$\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ac}}+\frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}} \ge \frac{3}{2}$$

y determinar el caso de igualdad.

Solución:

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ac}}+\frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}} \ge \frac{(a+b+c)^2}{a+\sqrt[3]{bc}+b+\sqrt[3]{ac}+c+\sqrt[3]{ab}}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ac}}+\frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}} \ge \frac{9}{3+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ac}+\sqrt[3]{ab}}$$

Pero por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica se tiene que

$$\sqrt[3]{bc} \le \frac{1+b+c}{3};\ \sqrt[3]{ac} \le \frac{1+a+c}{3};\ \sqrt[3]{ab} \le \frac{1+a+b}{3}$$ con igualdades si y sólo si $a=b=c=1$.

Entonces

$$\Rightarrow \frac{9}{3+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ac}+\sqrt[3]{ab}} \ge \frac{9}{3+\frac{1+b+c}{3}+\frac{1+a+c}{3}+\frac{1+a+b}{3}} = \frac{9}{3+\frac{3+2(a+b+c)}{3}} = \frac{9}{3+\frac{3+6}{3}} = \frac{3}{2}$$

Por lo que $\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ac}}+\frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}} \ge \frac{3}{2}$ y el caso de igualdad es solo para $a=b=c=1$.

Nivel U

Sea z un número complejo con $|z+1|>2$. Demostrar que $\left|z^3+1\right|>1$.

Solución:

Sea $|z+1|=a>2$ y además $z+\overline{z}=x$.

Se tiene $a^2=|z+1|^2=|z|^2+(z+\overline{z})+1$ entonces $|z|^2=a^2-(z+\overline{z})-1$ por lo que $|z|^2=a^2-x-1$.

Por otro lado

$$\left|z^3+1\right|^2=|z|^6+(z+\overline{z})^3-3|z|^2(z+\overline{z})+1=\left(a^2-x-1\right)^3+x^3-3\left(a^2-x-1\right)x+1$$

$$\Rightarrow\left|z^3+1\right|^2=3a^2x^2+\left(-3a^4+3a^2\right)x+a^6-3a^4+3a^2=3a^2\left(x-\frac{a^2-1}{2}\right)^2+\frac{a^2\left(a^2-3\right)^2}{4}$$

$$\Rightarrow\left|z^3+1\right|^2\geq\frac{a^2\left(a^2-3\right)^2}{4}=\frac{a^2\left(a^2-4\right)^2+2a^2\left(a^2-4\right)+a^2}{4}>\frac{a^2}{4}=1$$

Con lo que se concluye que

$$\left|z^3+1\right|>1$$