Olimpiada Matemática Ecuatoriana

LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2014/Nov/10

Nivel 1

Determinar el último dígito de la suma de 70 números enteros positivos consecutivos.
(Olimpiada Brasileña de Matemática 2001 – Primera Fase – Nivel 1)

Solución:

Como nos piden el último dígito solamente, entonces se analizará sólo el último dígito.
Para empezar veamos que los 10 primeros números terminan en 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 en algún orden, los siguientes diez también terminan en 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 en algún orden, y así sucesivamente hasta completar los 70 números (7 grupos de 10 números).
Cada grupo de 10 números consecutivos tienen la misma terminación que la suma de los números del 0 al 9.

$$0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$$

entonces dichas sumas terminan en 5, pero como tenemos un total de 7 grupos de 10 números consecutivos entonces se tendrá que termina en el mismo dígito que termina $7(5)=35$, que es 5.

Nivel 2

Sea $f(x)=x^2-3x+4$. Determinar cuántas soluciones reales tiene la ecuación $f(f(x))=2$.
(Modificado de Olimpiada Brasileña de Matemática 2001 – Primera Fase – Nivel 3)

Solución:

Veamos que $f(f(x))=(f(x))^2-3f(x)+4$ entonces $f(f(x))=2$ si y sólo si se que cumple que

$$(f(x))^2-3f(x)+4=2$$
$$(f(x))^2-3f(x)+2=0$$
$$(f(x)-2)(f(x)-1)=0$$

Con lo que tenemos dos soluciones posibles:

Caso 1: $f(x)=2$

$$x^2-3x+4=2$$
$$x^2-3x+4-2=0$$
$$x^2-3x+2=0$$

$(x-2)(x-1)=0$
$x=1$ o $x=2$.

Caso 2: $f(x)=1$

$x^2-3x+4=1$
$x^2-3x+4-1=0$
$x^2-3x+3=0$

En este caso no hay solución ya que el discriminante $(-3)^2-4(1)(3)=9-12=-3$ es negativo.

Entonces se tienen 2 soluciones reales.

Nivel 3

Demostrar que la ecuación $a^2b^2+b^2c^2+3b^2-c^2-a^2=2005$ no tiene soluciones enteras.
(Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2005 – Problema 2)

Solución:
Veamos que

$$a^2b^2+b^2c^2+3b^2-c^2-a^2-3=\left(a^2+c^2+3\right)\left(b^2-1\right)$$

Entonces la expresión dada es igual a

$$\left(a^2+c^2+3\right)\left(b^2-1\right)+3=2005$$

es decir que basta con demostrar que

$$\left(a^2+c^2+3\right)\left(b^2-1\right)=2002$$

no tiene soluciones enteras.

Veamos que 2002 es múltiplo de 2 pero no de 4, entonces exactamente uno de los factores del miembro izquierdo debe ser múltiplo de 2 pero no de 4, es decir que debe ser congruente con 2 en módulo 4.

Caso 1: $b^2-1\equiv 2(\operatorname{mod}4)$

$\Leftrightarrow b^2\equiv 3(\operatorname{mod}4)$

Pero todo cuadrado perfecto solo deja resto 0 o 1 en módulo 4, entonces es imposible, por lo que no hay solución en este caso.

Caso 2: $a^2+c^2+3\equiv 2(\operatorname{mod}4)$

$\Leftrightarrow a^2+c^2\equiv -1(\operatorname{mod}4)$

$\Leftrightarrow a^2+c^2\equiv 3(\operatorname{mod}4)$

Pero como todo cuadrado perfecto solo deja resto 0 o 1 en módulo 4, entonces la suma de dos cuadrados perfectos deja resto 0, 1 o 2 en módulo 4, por lo que no hay solución en este caso.

Entonces no hay solución en los enteros para la ecuación.

Nivel U

Hallar todas las parejas $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ para los cuales existe una y sólo una matriz M real simétrica de 2×2 tal que $\operatorname{tr} M = a$ y $\det M = b$.

Nota: $\operatorname{tr} M$ representa la traza de la matriz M, es decir la suma de los elementos de la diagonal de M.

(IMC 2014 – Problema 1)

Solución 1:

Sean λ_1 y λ_2 los eigenvalores de M, como M es simétrica necesariamente ambos eigenvalores son reales y además sabemos que $\lambda_1 + \lambda_2 = a$ y $\lambda_1 \bullet \lambda_2 = b$. Los eigenvalores son reales si y solo si se cumple $a^2 \geq 4b$.

Si $a^2 > 4b$, entonces se tiene que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y las matrices reales simétricas $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ cumplen todas las condiciones y son distintas entonces necesariamente se cumple que $a^2 = 4b$.

Ahora consideremos $\left(2k, k^2\right)$ que obviamente cumplen la igualdad anterior y $M = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ que cumple las condiciones, vamos a demostrar que es la única.

Supongamos que N también cumple, entonces como N es simétrica puede descomponerse espectralmente de la siguiente manera donde M es la matriz diagonal de eigenvalores que es k veces la matriz identidad I y Q es una matriz ortogonal., es decir que transpuesta es su inversa.

$$N = QMQ^T = Q(kI)Q^T = kI = M$$

entonces $N = M$ y por ende M es única.

Por lo que $(a,b) = \left(2k, k^2\right)$; $\forall k \in \mathbb{R}$.

Solución 2:

Sea $M = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$, donde las entradas son todas enteras, por ende $a = x + y$ y $b = xy - z^2$.

Entonces la matriz $N = \begin{pmatrix} y & z \\ z & x \end{pmatrix}$ también cumple las condiciones, necesariamente debemos tener $x = y$ para que la matriz sea única. Luego $M = \begin{pmatrix} x & z \\ z & x \end{pmatrix}$, por tanto $a = 2x$ y $b = x^2 - z^2$.

Sea $N = \begin{pmatrix} x-z & 0 \\ 0 & x+z \end{pmatrix}$, esta matriz también cumple las condiciones, necesariamente debemos tener $z = 0$ para que la matriz sea única. Luego $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $a = 2x$ y $b = x^2$.

Por lo que $(a,b) = \left(2k, k^2\right)$; $\forall k \in \mathbb{R}$.