Olimpiada Matemática Ecuatoriana

LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2014/Nov/17

Nivel 1

En cada subconjunto de 7 elementos del conjunto $\{1,2,3,\ldots,10\}$ se toma el mayor. ¿Cuál es la suma de todos esos elementos mayores?

Solución:

Contemos cuántas veces cada número es el mayor en un subconjunto que pertenezca.

- Claramente los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 nunca serán los mayores en un subconjunto.
- El número 7 es el mayor en solo 1 subconjunto, en $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.
- El número 8 es el mayor en 7 subconjuntos, en:
$$\{1,2,3,4,5,6,8\}, \{1,2,3,4,5,7,8\}, \ldots, \{2,3,4,5,6,7,8\}.$$
- Para el número 9 se hará lo siguiente, como son conjuntos de 7 elementos entonces se debe elegir primero el número 9 que será el mayor de todos los elementos de dicho conjunto, luego procedemos a elegir los restantes 6 elementos de entre el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, esta elección se puede hacer de $\binom{8}{6}=28$ formas, es decir que hay 28 subconjuntos en los que el 9 es el mayor de los elementos.
$$\{1,2,3,4,5,6,9\}, \{1,2,3,4,5,7,9\}, \ldots, \{3,4,5,6,7,8,9\}.$$
- Para el número 10 se hará lo mismo que en el anterior caso, como son conjuntos de 7 elementos entonces se debe elegir primero el número 10 que será el mayor de todos los elementos de dicho conjunto, luego procedemos a elegir los restantes 6 elementos de entre el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, esta elección se puede hacer de $\binom{9}{6}=84$ formas, es decir que hay 84 subconjuntos en los que el 10 es el mayor de los elementos.
$$\{1,2,3,4,5,6,10\}, \{1,2,3,4,5,7,10\}, \ldots, \{4,5,6,7,8,9,10\}.$$

Ahora basta sumar los elementos con sus repeticiones $7+8(7)+9(28)+10(84)=\boxed{1155}$.

Nota: $\binom{8}{6}$ es la cantidad de formas de elegir 6 elementos de un conjunto total de 8 elementos, para calcular el valor se hace uso de $\binom{8}{6}=\frac{8!}{6!\bullet 2!}$ lo cual es 28, así mismo se puede calcular $\binom{9}{6}$. De manera general $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Nivel 2

Hay varias velas del mismo tamaño en una fila. En el primer día se enciende una vela durante una hora. En el segundo día dos velas se encienden durante una hora, en el tercer día tres velas se encienden durante una hora, y así sucesivamente, hasta el último día, cuando todas las velas se encienden durante una hora. Al final de ese día, todas las velas fueron completamente consumidas. Encuentre todas las posibilidades para el número de velas.

Solución:

Supongamos que tenemos n velas de duración k horas. Entonces para consumir todas las velas se necesitan nk horas (en total).

Entonces

$$1+2+3+\ldots+n=nk$$
$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=nk$$
$$\Rightarrow \frac{n+1}{2}=k$$
$$\Rightarrow n=2k-1$$
$$\Rightarrow n \text{ es impar.}$$

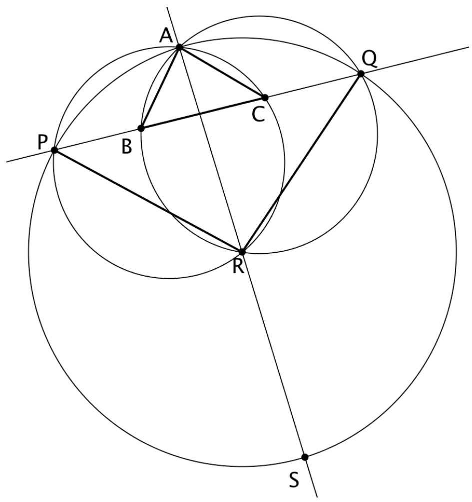
Ahora vamos a probar que para todo n impar se puede realizar la tarea ($n=2k-1$). El día 1 encendemos la vela v_m y el día $2k-2$ encendemos todas la velas excepto v_m; el día 2 encendemos v_p, v_q y el día $2k-3$ encendemos todas las velas excepto v_p, v_q. Procedemos así sucesivamente: el día i encendemos i velas y el día $2k-i-1$ encendemos la $2k-i-1$ velas restantes. Al final del día $2k-2$ habremos encendido todas las velas $k-1$ veces, y el último día al encender todas, se consumirán por completo.

Nivel 3

Sea ABC un triángulo. Sea P el punto en la recta BC tal que B está entre P y C y además $BP=AB$. Del mismo modo, sea Q el punto en la recta BC tal que C está entre Q y B y además $CQ=AC$. Si R es la segunda intersección de las circunferencias circunscritas de los triángulos ACP y ABQ. Probar que el triángulo PQR es isósceles.

Solución:

Sea S la intersección de AR con el circuncírculo del triángulo PAQ, entonces:



$$\measuredangle PSA=\measuredangle AQP=\frac{1}{2}\measuredangle ACP=\frac{1}{2}\measuredangle ARP$$
$$\Rightarrow \measuredangle PSA=\measuredangle SPR$$
$$\Rightarrow RP=RS$$

Análogamente $RQ=RS$

Entonces $RP=RQ$ con lo que se acaba de demostrar que PQR es isósceles.

Nivel U

Los ceros del polinomio $P(x)=x^3-10x+11$ son u,v,w. Determinar el valor de

$$\arctan u+\arctan v+\arctan w$$

Solución:

Sea $a=\arctan u$, $b=\arctan v$, $c=\arctan w$, entonces se busca $a+b+c$.
Se sabe que

$$\tan(a+b+c)=\frac{\tan a+\tan b+\tan c-\tan a\tan b\tan c}{1-(\tan a\tan b+\tan a\tan c+\tan b\tan c)}$$

$$\Rightarrow \tan(a+b+c)=\frac{u+v+w-uvw}{1-(uv+uw+vw)}$$

Pero por las relaciones de Vièta se tiene que

$u+v+w=0$
$uv+uw+vw=-10$
$uvw=-11$

Por lo que $\tan(a+b+c)=\dfrac{11}{1+10}=1$ entonces $a+b+c=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

Como el producto de uvw es negativo entonces hay una cantidad impar de ceros negativos en la ecuación, pero como la suma de los ceros es 0 entonces hay dos positivos y un negativo, por lo que uno de los valores a,b,c está en $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ y los otros dos están en $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, por lo que k debe ser 0, y esto lleva a que $a+b+c=\dfrac{\pi}{4}$, por lo que

$$\arctan u+\arctan v+\arctan w=\boxed{\frac{\pi}{4}}$$