Olimpiada
Matemática
Ecuatoriana

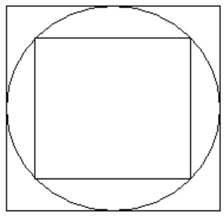
LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2014/Nov/24

Nivel 1

Un cuadrado se inscribe en un círculo el cual está inscrito en un cuadrado. Hallar la razón entre las áreas de los dos cuadrados.



Solución:

El círculo se lo rota 45º de modo que los vértices del cuadrado interno se coloquen sobre los puntos de tangencia de la circunferencia con el cuadrado externo. Si, en esa posición, se trazan las diagonales del cuadrado interno, con ellas el cuadrado externo se dividirá en cuatro cuadrados congruentes. Notaremos que los lados del cuadrado interno trazan las diagonales de éstos cuatro cuadrados que son cada uno un cuarto del cuadrado externo. Así, será notorio que en cada cuarto del cuadrado externo, la mitad de su área estará contenida en el cuadrado interno. Sumando eso en los cuatro cuadrantes formados, tenemos que la proporción del área del cuadrado interno al cuadrado externo es $\frac{1}{2}$.

Nivel 2

Demostrar que $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ es verdad para todos los números positivos a,b,c con igualdad si y sólo si $a=b=c$.

Solución:

Hay una solución sencilla multiplicando los tres factores en el lado izquierdo, de los cuáles saldrán dos términos abc que se eliminarán disminuyendo el lado derecho de la desigualdad a $6abc$.

Tendremos 6 términos en el lado izquierdo tales que asociados en parejas y cada una con uno de tres términos $-2abc$ proveniente del lado derecho, podremos factorizar un común múltiplo y luego un trinomio cuadrado perfecto en cada grupo, dejando a la expresión como

$$c(a-b)^2 + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 \geq 0 \qquad (1)$$

Puesto que los tres números son positivos y todo cuadrado es no negativo, concluimos que ésta expresión es cierta bajo las condiciones dadas por el problema. Por la relación de equivalencia, podemos aceptar como cierta la aseveración planteada por el problema. Vemos que la igualdad en la desigualdad (1) se da cuando todos los cuadrados del lado izquierdo sean ceros, y eso se cumple si y sólo si $a=b=c$.

Nivel 3

¿Existe una permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de los números $1,2,3,\ldots,n$ tal que $\nexists i, j, k$ con $1 \le i < k < j \le n$ para los cuales $a_k = \frac{1}{2}\left(a_i + a_j\right)$?

Solución:

Sí existe una permutación, vamos a proceder a la demostración de que existe.

Veamos que $a_k = \frac{1}{2}\left(a_i + a_j\right)$ representa el promedio entre los términos a_i y a_j.

Vamos primero a demostrar (por inducción) que se puede hacer para las potencias de 2, es decir para $n = 2^m$. Veamos que si se demuestra esto ya el problema se terminaría ya que bastaría con eliminar los números que no se deben usar y así tendremos el ejemplo para cualquier valor $n < 2^m$, por ejemplo, si se cumple para $n = 1024 = 2^{10}$ entonces se cumple para $n = 1000$ ya que se tendrían que eliminar solo los números $1001, 1002, \ldots, 1024$ para tener el ejemplo de permutación de los números del 1 al 1000. Entonces construiremos una permutación para $n \in \left\{2^1, 2^2, 2^3, 2^4 \ldots\right\}$.

Paso inicial de la inducción:

El caso inicial $m = 1$ es trivial, el siguiente caso $m = 2$ se puede ver que la permutación $2,4,1,3$ cumple las condiciones del problema.

Paso de hipótesis de la inducción: Ahora supongamos que el caso m tiene una permutación $a_1, a_2, \ldots a_{2^m}$ de los números $1,2,3,\ldots,2^m$ que cumple las condiciones del problema.

Paso de tesis de la inducción: Consideremos la sucesión $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{2^m}$ que está formada por todos los números pares entre 1 y 2^{m+1} (inclusive) y consideremos la sucesión $2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \ldots, 2a_{2^m} - 1$ que está formada por todos los números impares entre 1 y 2^{m+1} (inclusive), entonces la sucesión

$$2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{2^m}, 2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \ldots, 2a_{2^m} - 1$$

es una permutación de $1,2,3,\ldots,2^{m+1}$. Se probará que la sucesión anterior cumple las condiciones del problema.

Cualquier pareja de números de distintas mitades de la sucesión tienen distinta paridad, por lo que su promedio no es un entero, y por esto no puede ser igual a algún término que se encuentre entre ellos. Ahora demostraremos que si dos números están en la misma mitad entonces su promedio no se encuentra entre ellos dos, supongamos lo contrario, existen $i < k < j$ tal que $\frac{2a_i + 2a_j}{2} = 2a_k$ pero esto se cumple $\Leftrightarrow \frac{a_i + a_j}{2} = a_k$ pero esto contradice la suposición del paso anterior de la inducción, por lo que se ha llegado a una contradicción. De manera análoga se demuestra si ambos números están en la otra mitad de la sucesión. Por lo que se ha concluido la demostración, y por esto sí existe una sucesión que cumpla los requisitos del problema.

Nivel U

Sea f una función real definida en el intervalo $\left[0,1\right]$ tal que $f\left(0\right)=f\left(1\right)$ y si $a,b\in\left[0,1\right]$, entonces $\left|f\left(a\right)-f\left(b\right)\right|<\left|a-b\right|$. Demostrar que

$$\left|f\left(a\right)-f\left(b\right)\right|<\frac{1}{2}\ ;\forall\ a,b\in\left[0,1\right]$$

Solución:

Sea $\varepsilon>0$ un real cualquiera tal que $0\leq\left|a-b\right|<\varepsilon$, entonces $0\leq\left|f\left(a\right)-f\left(b\right)\right|<\left|a-b\right|<\varepsilon$. Por lo que la función f es continua en el intervalo $\left[0,1\right]$.

Como f es continua en $\left[0,1\right]$, existen reales $x,y\in\left[0,1\right]$ tales que $f\left(x\right)=m$ es el mínimo absoluto y $f\left(y\right)=M$ es el máximo absoluto en este intervalo. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x\leq y$ y por tanto aplicando 3 veces la propiedad que cumple la función, tenemos que

$$f\left(0\right)-m=\left|f\left(0\right)-f\left(x\right)\right|<\left|0-x\right|=x$$
$$M-m=\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\left|x-y\right|=y-x$$
$$M-f\left(1\right)=\left|f\left(y\right)-f\left(1\right)\right|<\left|y-1\right|=1-y$$

Sumando estas 3 desigualdades y recordando que $f\left(0\right)=f\left(1\right)$ tenemos que

$$2\left(M-m\right)<1\Rightarrow M-m<\frac{1}{2}$$

Para todos $a,b\in\left[0,1\right]$, tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} m\leq f\left(a\right)\leq M \\ m\leq f\left(b\right)\leq M \end{array}\right\}\Rightarrow m-M\leq f\left(a\right)-f\left(b\right)\leq M-m$$

$$\Rightarrow\left|f\left(a\right)-f\left(b\right)\right|\leq M-m<\frac{1}{2}$$