LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Ago/17

Nivel 1

Anthony hace una lista, de menor a mayor, de todos los enteros positivos que dividen al número 110110011. ¿Cuáles son los primeros tres números de esa lista?

Solución:

Ciertamente el primer número es 1.
El número no es divisible por 2 pero si por 3 ya que la suma de sus dígitos es 6.
No es divisible por 5 y una división muestra que tampoco lo es por 7.
No es divisible por 9 ya que la suma de sus dígitos no es múltiplo de 9, pero si es divisible entre 11 ya que 110110011= 11(1001001).
Por lo tanto, los primeros tres números de la lista son 1, 3 y 11.

Nivel 2

Seis personas están sentadas alrededor de una mesa circular. ¿De cuántas formas pueden estrechar las manos tres parejas de personas de tal manera que no haya cruces de brazos?
Nota: Ninguna persona estrecha las manos con dos personas al mismo tiempo.

Solución:

Sean A, B, C, D, E y F las personas sentadas en ese orden. Ahora se procederá a analizar cada uno de los casos posibles.

- Si A estrecha las manos con B entonces las estrechan C con D y E con F, o, C con F y E con D.
- Análogamente si A estrecha las manos con F, entonces las estrechan B con C y D con E, o, B con E y C con D.
- Si A estrecha las manos con C, entonces B no puede estrecharlas con nadie, y si A estrecha las manos con D entonces B y C deben estrecharlas y, E y F también.
- Finalmente si A estrecha las manos con E, entonces F no puede estrecharlas con nadie.

Por los tanto hay $\boxed{5}$ formas de que las tres parejas puedan estrechar las manos sin cruce de brazos.

Nivel 3

Considerar n puntos en el plano y m rectas que unen pares de puntos de tal manera que cualesquiera dos puntos están unidos por a lo más una recta. Sea k el número mínimo de colores necesarios para pintar los n puntos de tal manera que cualesquiera dos puntos unidos por una recta tienen distinto color. Demostrar que

$$k \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m}$$

Solución:

Denotemos con $1,2,\ldots,k$ a los colores. Sean n_i el número de puntos que tiene el color i, para $i = 1,2,\ldots,k$. Como hay n puntos, tenemos $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Veamos que para cualesquiera r puntos en el plano tales que cualesquiera dos están unidos por a lo más una recta, el número máximo de rectas que determinan es $\binom{r}{2}$. Usando esto y el hecho de que cualesquiera dos puntos unidos por una recta tienen distinto color entonces se tiene que

$$m \leq \binom{n}{2} - \left[\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \ldots + \binom{n_k}{2}\right]$$

con la igualdad si y sólo si todo punto de color i está unido con todo punto de color distinto de i, para $i = 1,2,\ldots,k$.

Entonces se tiene

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i - 1) = \frac{1}{2}\left(n^2 - n - \sum_{i=1}^{k} n_i^2 + \sum_{i=1}^{k} n_i\right)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{2}\left(n^2 - n - \sum_{i=1}^{k} n_i^2 + n\right)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{2}\left(n^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i^2\right)$$

Por otro lado, por la Desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} 1\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2$

es decir que $\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \geq \frac{n^2}{k}$, por lo tanto

$$m \leq \frac{1}{2}\left(n^2 - \frac{n^2}{k}\right) \Leftrightarrow 2km \leq kn^2 - n^2 \Leftrightarrow k\left(n^2 - 2m\right) \geq n^2 \Leftrightarrow k \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m}$$

Nivel U

Una sucesión se define de la siguiente manera: Se toma un valor a_0 en el intervalo $[0,1]$. Para $n \geq 1$ se define $a_{n+1} = 8a_n{}^4 - 8a_n{}^2 + 1$. Demostrar que existe una infinidad de valores de a_0 para los cuales la sucesión $\{a_n\}$ converge.

Solución:

Se va a utilizar la siguiente fórmula que se obtiene de Moivre, de considerar las partes reales y de reemplazar todos los $\operatorname{sen}^2 \alpha$ por $1 - \cos^2 \alpha$, o también aplicando dos veces la fórmula para el coseno del ángulo doble, $\cos(4\alpha) = 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1$.

Como en el problema se tiene que $a_0 \in [0,1]$, entonces existe α tal que $a_0 = \cos\alpha$.

Veamos que la fórmula enunciada, $a_1 = \cos(4\alpha)$ e inductivamente se puede comprobar que $a_n = \cos\left(4^n \alpha\right)$.

Para finalizar el problema basta encontrar una infinidad de valores de α que hagan que la sucesión converja. Pero, por ejemplo, tomando $\alpha = \dfrac{\pi}{4^j}$ para cualquier entero j se tiene que $4^n \alpha$ es un múltiplo par de π para $n \geq j+1$ y por tanto a partir de a_{j+1} la sucesión es constantemente 1 y por tanto converge.