Olimpiada
Matemática
Ecuatoriana

LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Ago/24

Nivel 1

En un examen de matemática que tenía 10 preguntas se daban 5 puntos por cada respuesta correcta y se quitaban 3 puntos por cada error. Todos los alumnos respondieron todas las preguntas. Si Fernando obtuvo 34 puntos, Alfredo obtuvo 10 puntos y Miguel obtuvo 2 puntos, ¿cuántas respuestas correctas tuvieron entre los tres?

Solución:
Primero veamos que el total de puntos entre los tres fue de $34+10+2=46$ puntos y en total respondieron 30 preguntas entre los tres.

Sea x el número de preguntas que fueron respondidas correctamente, como todas las preguntas fueron respondidas (correctamente o incorrectamente) entonces el número de preguntas que fueron respondidas incorrectamente fue de $30-x$.

Ahora se plantea una ecuación para relacionar la cantidad de preguntas respondidas y el total de puntos obtenidos, para esto se debe usar el hecho de que por cada pregunta respondida correctamente se otorga 5 puntos y cada pregunta respondida incorrectamente se quita 3 puntos

$$5x-3(30-x)=46 \Rightarrow 5x-90+3x=46 \Rightarrow 8x=46+90 \Rightarrow 8x=136 \Rightarrow x=17$$

Con lo que el total de respuestas correctas que tuvieron entre los tres fue $\boxed{17}$.

Nivel 2

Un numero se llama *bacán* si tiene exactamente dos dígitos y la suma de ellos equivale a una cuarta parte del numero. Por ejemplo, el número 24 es bacán ya que $2+4=6=\frac{24}{4}$. ¿Cuánto vale la suma de todos los números bacanes?

Solución:
Supongamos que $n=10a+b$ es bacán, donde a y b son los dígitos de n.

Entonces se debe cumplir que $4(a+b)=10a+b$ y por tanto $6a=3b$, de aquí $2a=b$ por lo que la cifra de las unidades debe ser igual al doble de la cifra de las decenas para que el número sea bacán, por lo tanto, los números bacanes son 12, 24, 36 y 48, cuya suma es igual a $\boxed{120}$.

Nivel 3

Sea $ABCDE$ un pentágono cíclico tal que $AB \parallel CE$ y $AC \parallel DE$. Sea Γ la circunferencia circunscrita del pentágono. La recta tangente a Γ en E intersecta a AB en P. Sea Q la intersección de BD con CE. Demostrar que $AC = PQ$.

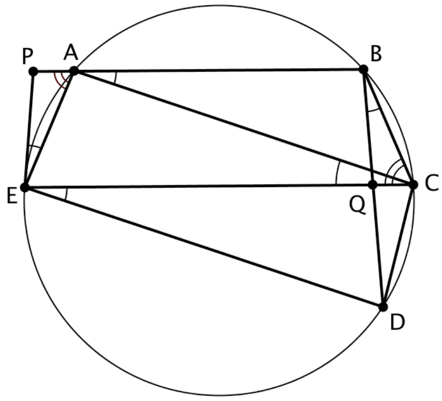
Solución:

Por ángulos entre paralelas y ángulos en circunferencia se tiene

$$\measuredangle DBC = \measuredangle DEC = \measuredangle ECA = \measuredangle CAB$$

Entonces $\widehat{AE} = \widehat{BC}$ con lo que $AE = BC$.

Además por ángulo semi-inscrito en circunferencia se tiene $\measuredangle PEA = \measuredangle ECA$.



Por otro lado, como $ABCE$ es cíclico entonces

$$\measuredangle PAE = \measuredangle BCE$$

Entonces se obtiene que $\triangle AEP \approx \triangle BCQ$ por criterio a.l.a. con lo que $AP = CQ$ y como $AP \parallel CQ$ entonces $APQC$ es paralelogramo por lo que $AC = PQ$.

Nivel U

Considere una sucesión de enteros positivos distintos $\{a_n\}_{n\geq 1}$. Se sabe que para cualquier entero positivo k se tiene que aparecen exactamente k números de k dígitos en $\{a_n\}_{n\geq 1}$. Determinar si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

siempre converge, siempre diverge o bien depende de la sucesión elegida.

Solución:

Se va a demostrar que una sucesión con las condiciones indicadas siempre converge.

Como todos los sumandos en la serie son positivos entonces la sucesión de sumas parciales es creciente. Así, para mostrar que la serie converge basta ver que las sumas parciales están acotadas. Notemos que cada número de k dígitos es mayor o igual a 10^{k-1}. De esta forma, los sumandos con denominador de k dígitos colaboran con a lo más $\frac{k}{10^{k-1}}$. Como $k \leq 2^{k-1}$ para todo entero positivo k, entonces estos sumandos colaboran con a lo más $\frac{2^{k-1}}{10^{k-1}} = \frac{1}{5^{k-1}}$.

Así, al tomar una suma parcial se tiene que está acotada por la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^{k-1}}$. Esta es una serie geométrica que converge a $\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$, por lo que $\frac{5}{4}$ es una cota para toda suma parcial y lo tanto la serie converge.

