Olimpiada Matemática Ecuatoriana

LISTA SEMANAL
Soluciones

Fecha:
2015/Ago/31

Nivel 1

Se tienen cuatro llaves de agua y una piscina. La primera y la segunda llave trabajando juntas llenan la piscina en 2 horas. La segunda y la tercera llave trabajando juntas la llenan en 3 horas. La tercera y la cuarta llave trabajando juntas la llenan en 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardan en llenar la piscina la primera y la cuarta llave trabajando juntas?

Solución:
Sean a, b, c y d las porciones de la piscina que cada llave llena por hora, respectivamente (a corresponde a la primera llave). Como la primera y la segunda llave llenan $\frac{1}{2}$ de la piscina por hora, tenemos que $a+b=\frac{1}{2}$. De manera análoga, tenemos que $b+c=\frac{1}{3}$ y $c+d=\frac{1}{4}$.

Ahora, tenemos que

$$a+d=(a+b)+(c+d)-(b+c)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

Luego, la primera y la cuarta llave trabajando juntas llenan $\frac{5}{12}$ de la piscina por hora. Por lo tanto, ambas llaves la llenan completamente en $\frac{12}{5}$ horas, esto es, en $\boxed{\text{2 horas y 24 minutos}}$.

Nivel 2

Simplificar $\sqrt{2^{2010}+2^{1006}+1}-\sqrt{2^{2010}-2^{1006}+1}$.

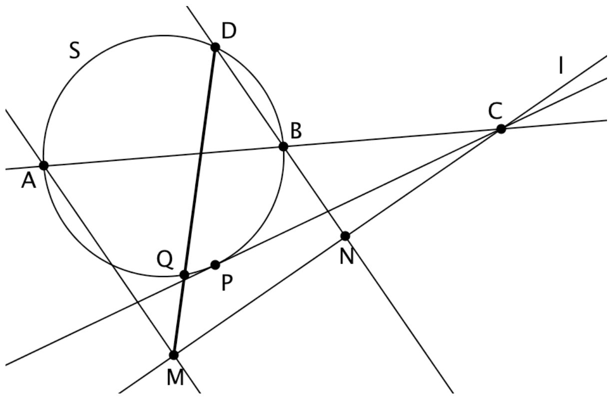
Solución:
Veamos que

$$\begin{aligned}\sqrt{2^{2010}+2^{1006}+1}-\sqrt{2^{2010}-2^{1006}+1} &= \sqrt{\left(2^{1005}\right)^2+2\bullet 2^{1005}+1}-\sqrt{\left(2^{1005}\right)^2-2\bullet 2^{1005}+1} \\ &= \sqrt{\left(2^{1005}+1\right)^2}-\sqrt{\left(2^{1005}-1\right)^2} \\ &= 2^{1005}+1-\left(2^{1005}-1\right) \\ &= \boxed{2}\end{aligned}$$

Nivel 3

Sean A, B y C puntos colineales del plano tales que B está entre A y C. Sea S la circunferencia de diámetro AB y l una recta que pasa por C, que no intersecta a S y que no es perpendicular a la recta AC. Los puntos M y N son los pies de las alturas trazadas desde A y B a la recta l. Desde C se trazan dos rectas tangentes a S, donde P es el punto de tangencia más cercano a l. Demostrar que $MPBC$ es cíclico si y sólo si las rectas BM y AN son perpendiculares.

Solución:



Sean $D = BN \cap S$, $Q = DM \cap S$.

Es claro que $AN \perp BM$ si y sólo si $\measuredangle MAN = \measuredangle BMN$ y como $AMND$ es un rectángulo entonces $\measuredangle MAN = \measuredangle MDN$ y además $\measuredangle MDN = \measuredangle QAB$ por lo que se tiene que $AN \perp BM$ si y sólo si $\measuredangle QAB = \measuredangle BMN$.

Por otro lado como $\measuredangle ABQ = \measuredangle ADQ = \measuredangle QMN$ entonces $MQBC$ es cíclico, con lo que $\measuredangle BMN = \measuredangle BQC$, con esto $AN \perp BM$ si y sólo si $\measuredangle QAB = \measuredangle BQC$, lo que significa que CQ es tangente a S y como P es el punto de tangencia entonces equivale a decir que $P = Q$ y como $MQBC$ es cíclico, lo último equivale a que $MPBC$ es cíclico, por lo tanto se tiene que $AN \perp BM$ si y sólo si $MPBC$ es cíclico.

Nivel U

Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función contínua tal que

$$\int_0^n f(x) f(n-x) dx = \int_0^n (f(x))^2 dx$$

para todo entero $n \geq 1$. Demostrar que f es periódica.

Solución:

Se procederá a probar que el período es 1.

Sea n un entero positivo. Se define $y = n - x$, con lo que se obtiene

$$\int_0^n f(n-y) f(y) dy = \int_0^n (f(n-y))^2 dy$$

Es decir que

$$\int_0^n f(n-x) f(x) dx = \int_0^n (f(n-x))^2 dx$$

Sumando esta expresión con la dada en el problema se obtiene

$$\int_0^n (f(x))^2 dx + \int_0^n (f(n-x))^2 dx = 2\int_0^n f(x) f(n-x) dx$$

Con lo que

$$\int_0^n \left(f(x)-f(n-x)\right)^2 dx = 0$$

Considerando la continuidad de f se obtiene que $f(x)=f(n-x)$ para todo $x\in[0,n]$.
Sea $x\geq 0$ y se considera $n\geq x$ un entero positivo, entonces

$$f(x+1)=f(n+1-x-1)=f(n-x)=f(x)$$

con lo que se puede concluir que f es periódica con período 1.