LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Ene/26

Nivel 1

¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener sumando pares de números distintos del conjunto $\{1,2,3,4,5,\ldots,2015\}$?

Solución:

Veamos que el mínimo resultado que se puede obtener es $1+2=3$ y que el máximo resultado es $2014+2015=4029$ por lo que se puede pensar que los resultados que se podrán obtener son $\{3,4,5,\ldots,4028,4029\}$.

Pero es necesario demostrar que sí es posible obtener cada uno de ellos, para esto veamos

$$\begin{aligned} 1+2&=3\\ 1+3&=4\\ 1+4&=5\\ &\vdots\\ 1+2015&=2016 \end{aligned}$$

con lo que se pueden obtener todos los números desde el 3 hasta 2016, ahora falta demostrar que se pueden obtener los resultados desde el 2017 hasta 4029, para esto veamos

$$\begin{aligned} 2+2015&=2017\\ 3+2015&=2018\\ 4+2015&=2019\\ &\vdots\\ 2014+2015&=4029 \end{aligned}$$

por lo que se pueden obtener todos los números de $\{3,4,5,\ldots,4028,4029\}$ y con esto se puede concluir que se pueden obtener $\boxed{4027}$ resultados diferentes.

Nivel 2

Demostrar que la suma de cualesquiera n números primos es mayor que n^2.

Solución:

Primero veamos que la suma más pequeña que se puede obtener es cuando se sumen los n primeros primos, y bastaría con demostrar que en este caso extremo se cumple el problema para terminar el mismo, ya que si sumamos otros números primos es obvio que la suma se incrementará.

Sean $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_n$ los primeros n primos.
Veamos que el único primo par es el 2, y además observemos que los siguientes primos tienen una diferencia de, como mínimo, 2 unidades (dejando de lado el 2), entonces se tiene:

$$
\begin{aligned}
&p_1 = 2\\
&p_2 = 3\\
&p_3 = 5\\
&p_4 = 7\\
&p_5 \geq 9\\
&p_6 \geq 11\\
&\vdots\\
&p_n \geq 2n-1
\end{aligned}
$$

Sumando las n expresiones se obtiene

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \geq 2 + \left(3+5+\ldots+(2n-1)\right) = 2 + \left(1+3+5+\ldots+(2n-1)\right) - 1 = 2 + n^2 - 1$$

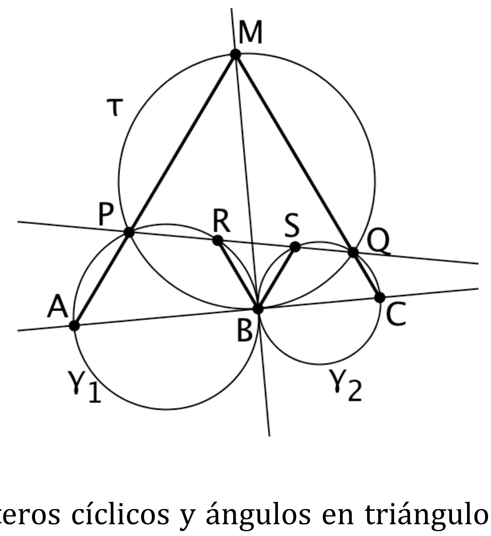
$$\Rightarrow p_1 + p_2 + \ldots + p_n \geq n^2 + 1 > n^2$$

Por lo que $p_1 + p_2 + \ldots + p_n > n^2$ y con esto se concluye la demostración.

Nivel 3

Sean A, B y C tres puntos colineales con B entre A y C. Sea τ una circunferencia tangente a AC en B, y sean γ_1 y γ_2 las circunferencias de diámetros AB y BC respectivamente. Sea P el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias τ y γ_1; sea Q el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias τ y γ_2. Suponer que la recta PQ corta a γ_1 en un punto R distinto de P, y que esa misma recta PQ corta a γ_2 en un punto S distinto de Q. Demostrar que concurren AR, CS y la tangente común a γ_1 y γ_2 por B.
(Olimpiada de México 2003 – Problema 2)

Solución:



Sea M el punto diametralmente opuesto a B en τ. Como AB es diámetro de γ_1 entonces $\measuredangle APB = 90^\circ$, como BM es diámetro de γ entonces $\measuredangle BPM = 90^\circ$, por lo tanto A, M y P son colineales, análogamente C, M y Q son colineales. Se demostrará que AR, CS y la tangente común concurren llegando a que son alturas del triángulo ACM.

Es claro que $BM \perp AC$ por ser BM la tangente común.
Veamos que $AR \perp CM \Leftrightarrow BR \parallel CM$ ya que $\measuredangle ARB = 90^\circ$ por ser $ABRP$ cíclico y $\measuredangle APB = 90^\circ$.

Se tiene $\measuredangle ABR = \measuredangle QPM = \measuredangle QBM = \measuredangle BCQ$ por cuadriláteros cíclicos y ángulos en triángulos, entonces $\measuredangle ABR = \measuredangle ACM$ por lo que $BR \parallel CM$ y por esto las tres rectas en cuestión son alturas del triángulo ACM y se conoce que las alturas son concurrentes, con lo que se ha concluido la demostración.

Nivel U

Determinar, en caso de existir, el valor de

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{(n+k)^2}$$

(Ronda Clasificatoria de Colombia 2008 – Nivel Universitario – Problema 2)

Solución:

Sea $f(x)=\frac{1}{x^2}$, entonces se tiene $\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+k}\right)^2=\frac{n}{(n+k)^2}$ por lo que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{(n+k)^2}=\frac{1}{n}f(1)+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n}f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)$$

Esto es la suma de Riemann (inferior) para la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ en $[1,2]$ por lo que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{(n+k)^2}=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$