Olimpiada Matemática Ecuatoriana

LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Feb/16

Nivel 1

Determinar el valor de $a-b$ si

$$a=1^2+2^2+3^2+\ldots+2005^2$$

y

$$b=(1\times 3)+(2\times 4)+(3\times 5)+\ldots+(2004\times 2006)$$

Solución:

Veamos

$$a-b=1^2+2^2+\ldots+2005^2-(1\times 3)-(2\times 4)-\ldots-(2004\times 2006)$$

Asociando

$$\Rightarrow a-b=1^2-(1\times 3)+2^2-(2\times 4)+\ldots+2004^2-(2004\times 2006)+2005^2$$

$$\Rightarrow a-b=1(1-3)+2(2-4)+\ldots+2004(2004-2006)+2005^2$$

$$\Rightarrow a-b=-1(2)-2(2)-\ldots-2004(2)+2005^2$$

$$\Rightarrow a-b=-2(1+2+\ldots+2004)+2005^2$$

Como se sabe $1+2+\ldots+2004=\dfrac{2004\bullet 2005}{2}$ esto es debido a que $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\Rightarrow a-b=-2\left(\frac{2004\bullet 2005}{2}\right)+2005^2$$

$$\Rightarrow a-b=-2004\bullet 2005+2005^2$$

$$\Rightarrow a-b=2005(-2004+2005)$$

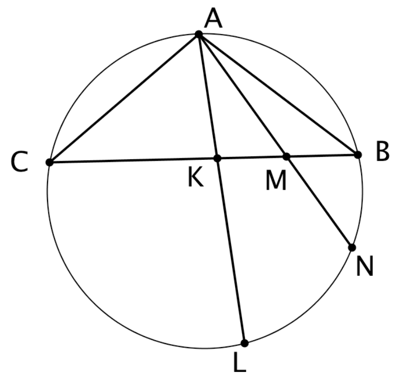
$$\Rightarrow a-b=\boxed{2005}$$

Nivel 2

El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia. Dos cuerdas se dibujan desde el vértice A, intersectando al lado BC y al arco BC en los puntos K, L y M, N respectivamente. Demostrar que si el cuadrilátero $KLNM$ es cíclico entonces el triángulo ABC es isósceles.

(Olimpiada de San Luis Potosí 2006 – Cuarto Examen – Problema 1)

Solución:



En el triángulo ACK se tiene que

$$\measuredangle ACK = \measuredangle ACB = 180^\circ - \measuredangle CAK - \measuredangle CKA$$

Como $\measuredangle CAK = \measuredangle CNL$ por subtender el mismo arco, y $\measuredangle CKA = \measuredangle MKL$ por ser opuestos por el vértice, se obtiene que $\measuredangle ACB = 180^\circ - \measuredangle CNL - \measuredangle MKL$.

Pero $\measuredangle MKL = 180^\circ - \measuredangle MNL$ por ser $KMNL$ cíclico.

Entonces $\measuredangle ACB = \measuredangle MNL - \measuredangle CNL = \measuredangle MNC$ y como $\measuredangle MNC$ y $\measuredangle ABC$ subtienden el mismo arco, se sigue que $\measuredangle ACB = \measuredangle ABC$, es decir que el triángulo ABC es isósceles.

Nivel 3

Veintitrés amigos se reúnen diariamente a jugar fútbol. Cada uno de ellos tiene asignado un número entero no negativo fijo. Cada día, estos amigos eligen a uno entre ellos para que haga el papel de árbitro, mientras que los restantes se separan en dos equipos de once personas cada uno, de manera que la suma en cada equipo de los números asignados sea la misma. Curiosamente esto es siempre posible, sin importar la persona que haya sido seleccionada como árbitro. Demostrar que todos los veintitrés amigos tienen asignado el mismo número.

Solución:

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{23}$ los números asignados y sea $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{23}$.

La condición dada equivale a decir que para todo a_i existe un entero T (la suma en cada equipo) tal que $S - a_i = 2T$. Se concluye que S y a_i tienen la misma paridad para cualquier i, de esto se deduce que todos los a_i deben tener siempre la misma paridad. A partir de la lista $a_1, a_2, \ldots, a_{23}$ se puede generar una lista $b_1, b_2, \ldots, b_{23}$ que satisfaga las condiciones del problema, de la siguiente manera: si los a_i son todos pares entonces $b_i = \frac{a_i}{2}$, si los a_i son impares, entonces $b_i = a_i - 1$. Estos números son todos no negativos y claramente siguen satisfaciendo todas las condiciones del problema, por lo tanto, todos tienen la misma paridad, además, la suma de todos ellos es estrictamente menor a S, a menos que todos los valores de a_i sean cero. Repetimos este proceso hasta qua alguno de los b_i sea cero, pero supongamos que no todos lo son, por lo tanto si se sigue repitiendo este proceso se llegará a un punto donde algún b_i sea igual a uno, por lo que la lista de los valores b_i contendrá valores pares e impares simultáneamente, lo que contradice las condiciones del problema. ¡Contradicción! Por lo tanto, si uno de los números b_i llega a ser cero, entonces todos ellos llegan a ser cero al mismo tiempo que éste, lo que implica que inicialmente todos los números eran iguales.

Nivel U

Sea $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ un polinomio de coeficientes complejos. Demostrar que si $P(x)$ tiene exactamente m raíces distintas, con $1 < m \le n$, entonces al menos uno de los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_m$ es diferente de 0.

(Olimpiada de Colombia 2008 – Nivel Universitario - Ronda Final – Problema 3)

Solución:

Sean $x_1,\ldots,x_m$ las raíces de $P(x)$ con multiplicidades $s_1,\ldots,s_m$ respectivamente. Entonces

$$P(x)=(x-x_1)^{s_1}\bullet\ldots\bullet(x-x_m)^{s_m}$$

El máximo común divisor de $P(x)$ y su derivada $P'(x)$ es el polinomio

$$Q(x)=(x-x_1)^{s_1-1}\bullet\ldots\bullet(x-x_m)^{s_m-1}$$

de grado $n-m$.

Se considera el polinomio

$$R(x)=nP(x)-xP'(x)=a_1x^{n-1}+2a_2x^{n-2}+\ldots+(n-1)a_{n-1}x+na_n$$

Este polinomio no es idénticamente 0 porque si lo fuera tendría todos los coeficientes iguales a 0, y el polinomio $P(x)=x^n$ tiene solamente una raíz, lo que contradice la condición $m>1$.

Además $R(x)$ es divisible por $Q(x)$. Se obtiene de esta forma que $\deg(R(x))\geq n-m$, por lo que al menos uno de los coeficientes $a_1,a_2,\ldots,a_m$ debe ser diferente de cero