Olimpiada
Matemática
Ecuatoriana

LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Feb/2

Nivel 1

Los boletos para un sorteo están enumerados del 001 al 999. ¿Cuántos dígitos cero se han empleado en total?

(Olimpiada de Perú 2006 – Segunda Fase – Nivel 1 – Problema 2)

Solución:

Desde el 000 hasta el 999 se escriben todos los dígitos la misma cantidad de veces, como hay un total de 1000 números de 3 dígitos cada uno entonces se usan 3000 pero como son 10 dígitos en total entonces cada dígito se escribe 300 veces.

Pero se tiene que el boleto 000 es el único que no se ha usado en el problema entonces debemos quitarle 3 dígitos cero, por lo que tenemos un total de $\boxed{297}$ dígitos cero.

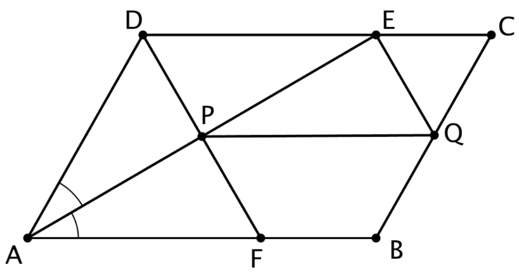
Nivel 2

El paralelogramo $ABCD$ tiene el ángulo BAD agudo y el lado AD menor que el lado AB. La bisectriz del ángulo BAD corta al lado CD en E. Se traza por D una perpendicular a AE que corta a AE en P, y se traza por E una perpendicular a AE que corta al lado BC en Q. Sabiendo que PQ es paralelo a AB y que $AB = 20$, calcular la medida del lado AD.

(Olimpiada de Argentina 1998 – Segundo Nivel)

Solución:

Sea F la intersección de la prolongación de DP con el lado AB y sea $x = AD$.



En el triángulo DAF se tiene que AP es altura y bisectriz por lo que dicho triángulo es isósceles con $AD = AF$, además P es el punto medio de DF, es decir

$$DF = 2 \bullet DP \qquad (1)$$

Por otro lado se tiene $\triangle DAF \sim \triangle QCE$ por tener lados correspondientes paralelos, es por esto que CEQ es isósceles, con $CQ = CE$, además se tiene

$$\frac{CQ}{AD} = \frac{EQ}{DF} \qquad (2)$$

Por otro lado se tiene que $DPQE$ es un paralelogramo, por tener lados opuestos paralelos, entonces

$$EQ = DP \qquad (3)$$

Por (1), (2) y (3) se obtiene

$$\frac{CQ}{AD} = \frac{DP}{2 \bullet DP} = \frac{1}{2}$$

de donde se obtiene

$$CE = CQ = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}x$$

Veamos que DAE es isósceles ya que $\measuredangle DEA = \measuredangle EAB$ (ángulos entre paralelas) y $\measuredangle DAE = \measuredangle EAB$ (por ser AE bisectriz de $\measuredangle BAD$) entonces

$$DE = AD = x$$

Finalmente

$$CD = CE + DE$$

$$20 = \frac{1}{2}x + x$$

$$x = \boxed{\frac{40}{3}}$$

Nivel 3

¿Con cuántos ceros puede terminar el número $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ si $n \in \mathbb{N}$?

(Olimpiada de San Petersburgo 1998)

Solución:

Se analizarán ciertos casos particulares para luego analizar los siguientes casos.

En el caso $n = 1$ se obtiene 10 que termina en un 0.
En el caso $n = 2$ se obtiene 30 que termina en un 0.
En el caso $n = 3$ se obtiene 100 que termina en dos 0.
En el caso $n = 4$ se obtiene que no termina en 0.

Se va a demostrar que nunca puede terminar en más de dos 0.

Para que un número termine en más de dos 0 debe ser múltiplo de $2^3 = 8$, es decir que $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 0 \pmod 8$, pero para $n \geq 3$ se tiene $2^n \equiv 4^n \equiv 0 \pmod 8$, entonces se debe cumplir que $1^n + 3^n \equiv 0 \pmod 8$ pero $1^n + 3^n = 1 + 3^n \equiv 0 \pmod 8$ $\Rightarrow 3^n \equiv -1 \pmod 8$ pero $3^n \in \{1,3\} \pmod 8$ entonces $3^n \not\equiv -1 \pmod 8$ por lo que nunca se obtendrán más de dos 0 como respuesta.

Nivel U
Si la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es diferenciable y además

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}f'(x)$$

para todo número real x. Demostrar que f es una función lineal.
(Olimpiada de Rumania 1999)

Solución:
Para demostrar que f es lineal bastaría con demostrar que su derivada es constante, para esto se demostrará que la derivada en cualquier punto es igual a la derivada en 0.
Se fija x, supongamos que x es positivo (el caso en el que sea negativo es análogo). Sea el conjunto $M=\left\{t\,/\,t\geq 0\wedge f'(t)=f'(x)\right\}$.
Claramente M es acotado por debajo entonces sea t_0 el ínfimo de M. La relación del problema implica que

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)-f(0)}{\frac{x}{2}}=2f'(0)-f'(0)=f'(0)$$

lo que demuestra que f' es contínua en 0. Es obvio que también es contínua para cualquier otro valor, siendo la razón de dos funciones contínuas. Esto implica que M es cerrado, y con esto $t_0\in M$.
Se desea demostrar que $t_0=0$. Se demostrará por reducción al absurdo, supongamos que $t_0>0$. Se tiene

$$\frac{f(t_0)-f\left(\frac{t_0}{2}\right)}{\frac{t_0}{2}}=f'(t_0)$$

el teorema del valor intermedio aplicado en el intervalo $\left[\frac{t_0}{2},t_0\right]$ demuestra la existencia de un $c\in\left(\frac{t_0}{2},t_0\right)$ tal que $f'(c)=f'(t_0)=f'(x)$ lo que contradice que t_0 sea el mínimo. Esto demuestra que para todo x se tiene $f'(x)=f'(0)$ por lo cual es constante, y con esto se concluye la demostración.