Olimpiada Matemática Ecuatoriana

LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Feb/9

Nivel 1

Pedro tiene una torre de cubos de lado $1cm$, tal que la base es un rectángulo de tamaño $3cm \times 4cm$ y su altura es $5cm$. Pedro pinta la superficie y después desarma la torre. ¿Cuántos cubos hay que no tienen ninguna cara pintada y que no estaban inicialmente en la base de la torre?

(Entrenamiento de Colombia – Segunda Prueba – Nivel 1 – Problema 1)

Solución:

Se tiene un arreglo de $3 \bullet 4 \bullet 5 = 60$ cubos. Quitando los cubos de la frontera, es decir los pintados y los de la base, se obtiene un arreglo de $(3-2)\bullet(4-2)\bullet(5-2) = 1 \bullet 2 \bullet 3 = \boxed{6\ cubos}$.

Nivel 2

Hallar todas las parejas de enteros positivos m y n tales que

$$m^2 + n^2 = (m+1)(n+1)$$

(Olimpiada Bolivariana 2010 – Nivel Intermedio – Problema 4)

Solución:

Primero veamos que m y n no pueden ser ambos pares ya que si fuera así se obtendría que el miembro de la izquierda es par pero el miembro de la derecha sería impar, por lo que no serían iguales. Ahora veamos que m y n no pueden tener distinta paridad ya que si fuera así el miembro de la izquierda sería impar pero el miembro de la derecha sería par, entonces no serían iguales. Faltaría analizar cuando m y n son impares, es decir $m = 2m_1 - 1$, $n = 2n_1 - 1$, con $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}^+$. Si se reemplaza las expresiones en la ecuación original se obtiene

$$(2m_1 - 1)^2 + (2n_1 - 1)^2 = ((2m_1 - 1) + 1)((2n_1 - 1) + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4m_1{}^2 - 4m_1 + 1 + 4n_1{}^2 - 4n_1 + 1 = 2m_1 \bullet 2n_1$$

$$\Leftrightarrow 4m_1{}^2 - 4m_1 + 4n_1{}^2 - 4n_1 + 2 = 2m_1 \bullet 2n_1$$

$$\Leftrightarrow 2m_1{}^2 - 2m_1 + 2n_1{}^2 - 2n_1 + 1 = 2m_1 n_1$$

$$\Leftrightarrow 2\left(m_1{}^2 - m_1 + n_1{}^2 - n_1\right) + 1 = 2m_1 n_1$$

pero lo anterior es imposible ya que el miembro de la izquierda es impar pero el de la derecha es par, entonces se concluye que no hay solución.

Nivel 3

Evaluar:

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\ldots+\frac{2015}{2013!+2014!+2015!}$$

Solución:

Es más práctico evaluar la expresión en notación de sumatoria, y mediante manipulaciones algebraicas:

$$\sum_{k=1}^{2013}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\sum_{k=1}^{2013}\frac{k+2}{k!\left[1+(k+1)+(k+1)(k+2)\right]}=\sum_{k=1}^{2013}\frac{k+2}{k!(k+2)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{2013}\frac{1}{k!(k+2)}=\sum_{k=1}^{2013}\frac{k+1}{(k+2)!}=\sum_{k=1}^{2013}\left(\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}\right)$$

Por la propiedad telescópica de la suma se tiene entonces que la sumatoria original del problema es igual a $\boxed{\frac{1}{2}-\frac{1}{2015!}}$.

Nivel U

Consideremos una elipse Λ con centro O y con focos F_1 y F_2. Para un punto P sobre el perímetro de Λ, sea d la distancia desde el punto O hasta la recta tangente a Λ en P. Demostrar que $PF_1 \cdot PF_2 \cdot d^2$ es constante conforme P varía sobre el perímetro de Λ.

Solución:

Consideremos la representación paramétrica de la elipse:

$$x = a\cos t$$

$$y = b\sin t$$

Donde a y b son constante y el parámetro t varía de 0 a 2π. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \geq b$. Luego los focos de la elipse tienen coordenadas $(\pm \mathrm{c}, 0)$ con $c^2 = a^2 - b^2$. Como sabemos el vector tangente **T** a la curva paramétrica es igual a:

$$\mathbf{T}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}=-a\sin t\,\mathbf{i}+b\cos t\,\mathbf{j}$$

Sea $\mathbf{x}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}$ el vector posición, luego el vector proyección de **x** sobre **T** es igual a:

$$\mathbf{x_T}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{T}\frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|^2}=(a\cos t\,\mathbf{i}+b\sin t\,\mathbf{j})\cdot(-a\sin t\,\mathbf{i}+b\cos t\,\mathbf{j})\frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|^2}=\left(-a^2+b^2\right)\cos t\sin t\frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|^2}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{x_T}=-c^2\cos t\sin t\frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|^2}$$

Luego el vector normal **n**, que sale desde el origen ortogonalmente a la recta tangente, es igual a:

$$\mathbf{n}=\mathbf{x}-\mathbf{x_T}=a\cos t\,\mathbf{i}+b\sin t\,\mathbf{j}+\frac{c^2}{\|\mathbf{T}\|^2}\cos t\sin t\left(-a\sin t\,\mathbf{i}+b\cos t\,\mathbf{j}\right)$$

$$\mathbf{n} = a\cos t\left(1-\frac{c^2}{\|\mathbf{T}\|^2}\sin^2 t\right)\mathbf{i} + b\sin t\left(1+\frac{c^2}{\|\mathbf{T}\|^2}\cos^2 t\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{n} = \frac{a}{\|\mathbf{T}\|^2}\cos t\left(\|\mathbf{T}\|^2 - c^2\sin^2 t\right)\mathbf{i} + \frac{b}{\|\mathbf{T}\|^2}\sin t\left(\|\mathbf{T}\|^2 + c^2\cos^2 t\right)\mathbf{j}$$

Como $\|\mathbf{T}\|^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$, luego reemplazando en **n**

$$\mathbf{n} = \frac{a}{\|\mathbf{T}\|^2}\cos t\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t - c^2\sin^2 t\right)\mathbf{i} + \frac{b}{\|\mathbf{T}\|^2}\sin t\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t + c^2\cos^2 t\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{n} = \frac{a}{\|\mathbf{T}\|^2}\cos t\left(b^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)\mathbf{i} + \frac{b}{\|\mathbf{T}\|^2}\sin t\left(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t\right)\mathbf{j} = \frac{ab^2}{\|\mathbf{T}\|^2}\cos t\,\mathbf{i} + \frac{a^2 b}{\|\mathbf{T}\|^2}\sin t\,\mathbf{j}$$

Luego d es la norma del vector **n**, por ende

$$d^2 = \|\mathbf{n}\|^2 = \frac{a^2b^4}{\|\mathbf{T}\|^4}\cos^2 t + \frac{a^4b^2}{\|\mathbf{T}\|^4}\sin^2 t = \frac{a^2b^2}{\|\mathbf{T}\|^4}\left(\mathrm{a}^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t\right) = \frac{a^2b^2}{\|\mathbf{T}\|^2}$$

Es fácil ver que

$$PF_1 = \sqrt{\left(a\cos t - c\right)^2 + \left(b\sin t\right)^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t - 2ac\cos t + c^2 + b^2\sin^2 t}$$

$$PF_1 = \sqrt{a^2\cos^2 t - 2ac\cos t + a^2 - b^2 + b^2\sin^2 t} = \sqrt{a^2\cos^2 t - 2ac\cos t + a^2 - b^2\cos^2 t}$$

$$PF_1 = \sqrt{c^2\cos^2 t - 2ac\cos t + a^2} = \sqrt{\left(c\cos t - a\right)^2} = \left|c\cos t - a\right| = a - c\cos t$$

Análogamente, tenemos que $PF_2 = a + c\cos t$ y por ende

$$PF_1\cdot PF_2\cdot d^2 = \left(a^2 - c^2\cos^2 t\right)\frac{a^2b^2}{\|\mathbf{T}\|^2} = \left(a^2\sin^2 t + b\cos^2 t\right)\frac{a^2b^2}{a^2\sin^2 t + b\cos^2 t} = a^2b^2$$

Concluimos que el producto $PF_1\cdot PF_2\cdot d^2 = a^2b^2$ es constante sobre la elipse.