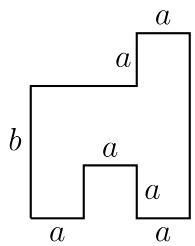
LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Jul/13

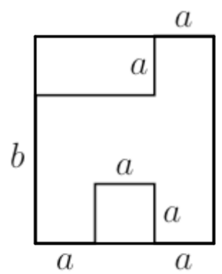
Nivel 1

Determinar el área de la figura mostrada en términos de a y b



Solución:

Veamos que se tiene un rectángulo de ancho $3a$ y alto $a+b$ que contiene a la figura anterior, entonces el área de la figura será el área de dicho rectángulo menos el área del rectángulo de la equina superior izquierda y menos el área del cuadrado de la parte inferior central.



- El área del rectángulo mayor es $3a(a+b)$.
- El área del rectángulo superior izquierdo es $a(2a)$.
- El área del cuadrado inferior central a^2.

Entonces el área de la figura original es $3a(a+b)-a(2a)-a^2=3a^2+3ab-2a^2-a^2=\boxed{3ab}$.

Nivel 2

De los números positivos que pueden ser expresados como suma de 2005 enteros consecutivos, ¿cuál ocupa la posición 2005?

Solución:

Como 2005 es impar entonces para cada entero n se tiene que

$$2005n=(n-1002)+(n-1001)+\ldots+n+\ldots+(n+1001)+(n+1002)$$

Por lo que el número en la posición 2005 debe ser múltiplo de 2005, entonces el número es $\boxed{2005^2}$.

Nivel 3

Dos circunferencias C_1 y C_2 se intersectan en los puntos A y B. Una recta que pasa por B intersecta a C_1 en K y a C_2 en M. Una recta paralela a AM es tangente a C_1 en Q. La recta AQ intersecta nuevamente a C_2 en R.

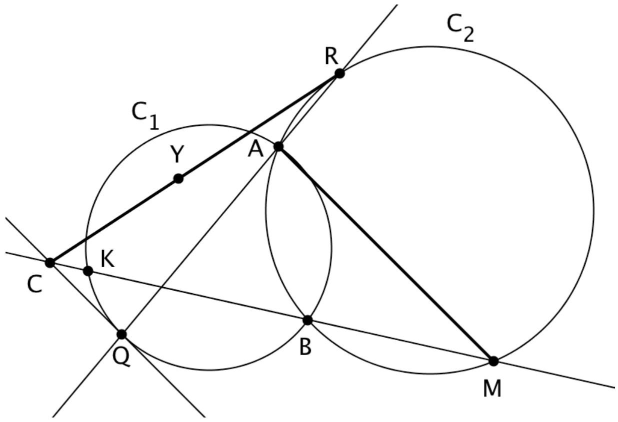
(a) Demostrar que la tangente a C_2 en R y la recta AK son paralelas.

(b) Demostrar que las tangentes en Q y R y la recta KM son concurrentes.

Solución:

Literal (a)

Sea RY la tangente en R a C_2 y sea C el punto de corte entre KM y la tangente en Q.



Se tiene que $\measuredangle QBA = \measuredangle CQA$ (subtienden el mismo arco en C_1) y $\measuredangle CQA = \measuredangle QAM$ ya que $CQ \parallel AM$.

Como $\measuredangle MAR = \measuredangle MBR$ (subtienden el mismo arco en C_2) se tiene que $\measuredangle QAM = 180^\circ - \measuredangle MAR = 180^\circ - \measuredangle MBR = \measuredangle KBR$.

Luego se tiene $\measuredangle QBA = \measuredangle KBR$, es decir que $\measuredangle QBK + \measuredangle KBA = \measuredangle KBA + \measuredangle ABR$ de donde $\measuredangle QBK = \measuredangle ABR$.

Como $\measuredangle QBK = \measuredangle QAK$ (subtienden el mismo arco en C_1) y $\measuredangle ABR = \measuredangle ARY = \measuredangle QRY$ (subtienden el mismo arco en C_2) se tiene que $\measuredangle QAK = \measuredangle QRY$ por lo que se puede concluir que $AK \parallel RY$.

Literal (b)

Se tiene que $\measuredangle QCB = \measuredangle BMA$ ya que $CQ \parallel AM$ y $\measuredangle BMA = \measuredangle BRA = \measuredangle QRB$ (subtienden el mismo arco en C_2).

Entonces $\measuredangle QCB = \measuredangle QRB$ luego $QBRC$ es cíclico. Sea D el punto donde se intersectan RY y MK.

Entonces $\measuredangle RDB = \measuredangle AKB$ ya que $AK \parallel RY$ y además $\measuredangle AKB = \measuredangle AQB = \measuredangle RQB$ (subtienden el mismo arco en C_1).

Luego se tiene $\measuredangle RDB = \measuredangle RQB$ por lo que $RDQB$ es cíclico.

Por último C y D están en MK por lo que $C = D$ y con esto RY, CQ y MK son concurrentes.

Nivel U

Se define una secuencia de números enteros tal que $a_1 = 3$ y que

$$a_{i+1} = 3^{a_i}, \ \text{i} \ge 1$$

Hallar todos los enteros entre 0 y 99 inclusive que aparecen como los dos últimos dígitos en la expansión decimal de infinitos términos de la secuencia.

Solución:

Tenemos que $\phi(4) = 2$ y que $\phi(25) = 20$, por tanto el teorema de Euler implica que:

$$\left.\begin{array}{l} 3^2 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 3^{20} \equiv 1 \pmod{4} \\ 3^{20} \equiv 1 \pmod{25} \end{array}\right\} \Rightarrow 3^{20} \equiv 1 \pmod{100}$$

Tenemos que $\phi(4) = 2$ y que $\phi(5) = 4$, por tanto el teorema de Euler implica que:

$$\left.\begin{array}{l} 3^2 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 3^{4} \equiv 1 \pmod{4} \\ 3^{4} \equiv 1 \pmod{5} \end{array}\right\} \Rightarrow 3^{4} \equiv 1 \pmod{20}$$

Luego tenemos que:

$$a_i \equiv -1 \pmod{4} \quad \forall i \ge 1$$

$$a_{i+1} = 3^{a_i} \equiv 3^{4-1} \equiv 7 \pmod{20} \quad \forall i \ge 1$$

$$a_{i+2} = 3^{a_{i+1}} \equiv 3^7 = 2187 \equiv 87 \pmod{100} \quad \forall i \ge 1$$

Luego para $i \ge 3$, a_i termina en 87 en su expansión decimal, por ende $\boxed{87}$ es el único número entre 00 y 99 inclusive que aparece como los dos últimos dígitos en la expansión decimal de infinitos términos de la secuencia.