# LISTA SEMANAL

**Soluciones**

**Fecha:**
2015/Jul/20

## Nivel 1

La edad actual de Pedro es igual a tres quintos de la edad actual de Fernando. Hace exactamente 10 años la suma de sus edades era 60, ¿cuál será la edad de Pedro dentro de exactamente 13 años?

**Solución:**

Sea $f$ la edad actual de Fernando, entonces la edad actual de Pedro es $\frac{3}{5}f$, entonces hace exactamente 10 años la edad de Fernando era $f-10$ y la edad de Pedro era $\frac{3}{5}f-10$, y como su suma era 60 entonces $\frac{3}{5}f-10+x-10=60 \Rightarrow \frac{8}{5}f-20=60 \Rightarrow \frac{8}{5}f=80 \Rightarrow f=50$ con lo que la edad actual de Fernando es 50, entonces la edad actual de Pedro es 30 es decir que dentro de exactamente 13 años Pedro tendrá $\boxed{43\ años}$.

## Nivel 2

Sea $N$ el menor entero positivo que es múltiplo de 72 y en cuya escritura sólo se usan los dígitos 8 y 9, con al menos uno de cada uno. Hallar el número $N$.

**Solución:**

Para que $N$ sea múltiplo de 72 debe ser múltiplo de 2, 4, 8 y 9.
Debe terminar en un dígito par para ser múltiplo de 2, así el último dígito es 8, luego para que sea múltiplo de 4 el número formado por las últimas dos cifras debe ser múltiplo de 4 con lo que la única opción que cumple es 88, luego para que sea múltiplo de 8 el número formado por las últimas tres cifras debe ser múltiplo de 8 con lo que la única opción que cumple es 888, ahora sólo falta que el número sea múltiplo de 9 para que sea múltiplo de 72 es decir que la suma de las cifras del número debe ser múltiplo de 9.
Veamos que agregar dígitos 9 no ayuda a obtener un múltiplo de 9 en la suma, pero igual se debe colocar al menos uno para cumplir con las condiciones del problema y para que sea el mínimo número que se obtenga entonces debemos tener la terminación 9888 para que sea múltiplo de 8 y que tenga al menos uno de cada dígito.
Ahora veamos que son necesarios nueve dígitos 8 en el número para tener que su suma sea múltiplo de 9, con lo que el mínimo número es $N=\boxed{8888889888}$

**Nivel 3**

Sea $n > 3$ un entero positivo y sea $S$ un conjunto de $n$ puntos en el plano de manera que no existen tres colineales y no son los vértices de un $n$-ágono convexo. Demostrar que existe un triángulo con vértices en tres de estos puntos de manera que éste tiene exactamente un punto de $S$ en su interior.

**Solución:**

Se procede por inducción en $n$. El caso base $n = 4$ es trivial, ya que la envoltura convexa de $S$ necesariamente es un triángulo, y éste tiene exactamente un punto de $S$ en su interior. Supongamos que la hipótesis se cumple para todo $k \leq n-1$. Entonces para $k = n$ se consideran los siguientes casos:

- Caso 1: Si la envoltura convexa de $S$ es un triángulo, entonces, los $n-3$ puntos restantes se encuentran en su interior, entonces, ya que $n \geq 5$, al menos uno de los tres triángulos formados, cuyos vértices son un punto interior elegido y dos puntos de la envoltura convexa tendrá al menos un punto en su interior, se repite el proceso con este nuevo punto y el triángulo que lo contiene sucesivamente hasta que se llegue a un triángulo con exactamente un punto en su interior.

- Caso 2: Si la envoltura convexa no es un triángulo y se pueden elegir tres vértices consecutivos $A, B, C$ (en ese orden) en su envoltura convexa tal que el triángulo formado por estos tres puntos no contenga un punto en su interior, entonces se retira el punto $B$ y se aplica la hipótesis para los $n-1$ puntos restantes.

- Caso 3: Si la envoltura convexa no es un triángulo y no se puede elegir tres vértices consecutivos de la envoltura convexa sin ningún punto en su interior, entonces se eligen tres puntos consecutivos y todos los puntos interiores a ese triángulo y se aplica la hipótesis inductiva para estos puntos (caso 1).

Claramente estas posibilidades cubren todos los casos, por lo tanto el problema queda demostrado.

**Nivel U**

Demostrar que el número complejo

$$z = \frac{2+i}{2-i}$$

tiene módulo 1, pero no es una raíz n-ésima de la unidad para cualquier entero positivo $n$.

**Solución:**

Veamos que

$$z = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{4-i^2} = \frac{4+4i+i^2}{4-(-1)} = \frac{4+4i+(-1)}{5} = \frac{3+4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

entonces $|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$ es decir que $|z| = 1$.

Supongamos que existe un entero $n \geq 1$ tal que $z^n = 1$, entonces $(2+i)^n = (2-i)^n$, y veamos que

$$2+i = (2-i) + 2i$$

entonces

$$(2-i)^n = (2+i)^n = (2-i)^n + \binom{n}{1}(2-i)^{n-1}2i + \ldots + \binom{n}{n-1}(2-i)(2i)^{n-1} + (2i)^n$$

Pero lo anterior es equivalente a

$$(2i)^n = (-2+i)\left[\binom{n}{1}(2i-1)^{n-2}2i + \ldots + \binom{n}{n-1}(2i)^{n-1}\right] = (-2+i)(a+bi)$$

con $a,b \in \mathbb{Z}$.

Entonces analizando el módulo de cada parte de la igualdad se obtiene que $2^n = 5\left(a^2+b^2\right)$ lo cual es una contradicción ya que una potencia de 2 no es múltiplo de 5.