Olimpiada Matemática Ecuatoriana

LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Jul/27

Nivel 1

A, B y C son 3 números, cada uno es el triple del anterior. Si se suman los dos más grandes y se le resta el más chico, el resultado es 99. ¿Cuáles son los 3 números?

Solución:

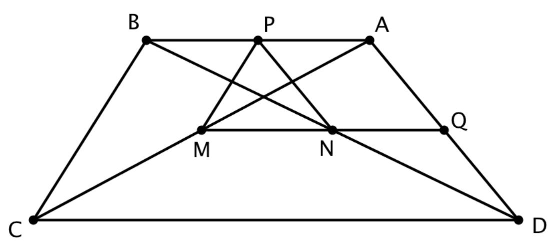
Veamos que $B=3A \Rightarrow C=3B=3(3A)=9A \Rightarrow B+C=3A+9A=12A \Rightarrow B+C-A=11A$

Pero $B+C-A=99$ entonces $11A=99$ por lo que $\boxed{A=9}$ luego $\boxed{B=27}$ con lo que $\boxed{C=81}$.

Nivel 2

El trapecio $ABCD$ tiene AB paralelo a CD. Sean M el punto medio de la diagonal AC, N el punto medio de la diagonal BD y P el punto medio del lado AB. Si $AB=15$, $CD=24$ y la altura del trapecio es $h=14$, hallar el área del triángulo MNP.

Solución:



Sea Q el punto medio del lado AD.

En el triángulo ABD, el segmento NQ es la base media y por lo tanto $NQ \parallel AB$ y $NQ=\frac{1}{2}AB=\frac{15}{2}$.

Por otro lado en el triángulo ACD, el segmento MQ es la base media y por lo tanto $MQ \parallel CD$ y $MQ=\frac{1}{2}CD=12$. Como $AB \parallel CD$ entonces $NQ \parallel MQ$, entonces M, N y Q son colineales y $MN \parallel CD$. Además $MN=MQ-NQ=12-\frac{15}{2}=\frac{9}{2}$.

Por otra parte, la altura del triángulo MNP correspondiente al lado MN es igual a la altura del triángulo AMQ, correspondiente al lado MQ, esto es debido a que sus bases están contenidas en una misma recta que es paralela a la recta AP.

Si MQ es la base media del triángulo ACD, entonces la altura del triángulo AMQ correspondiente al lado MQ es igual a $\frac{1}{2}$ la altura del triángulo ACD correspondiente al lado CD, es decir, igual a $\frac{14}{2}=7$, con lo que $(MNP)=\frac{1}{2}\bullet\frac{9}{2}\bullet 7=\boxed{\frac{63}{4}}$.

Nivel 3

Sean a,b,c números reales con $a^2+b^2+c^2=1$. Demostrar que:

$$a\sqrt{b^2+c^2}+b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{2}$$

Solución:

Por la conocida Desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i{}^2\right)$$

pero tomemos $n=3$, $(a_1,a_2,a_3)=(a,b,c)$ y $(b_1,b_2,b_3)=\left(\sqrt{b^2+c^2},\sqrt{a^2+c^2},\sqrt{a^2+b^2}\right)$

entonces

$$\left(a\sqrt{b^2+c^2}+b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\left(\sqrt{b^2+c^2}\right)^2+\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2+\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\right)$$

Entonces

$$\left(a\sqrt{b^2+c^2}+b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\le 2$$

con lo que $a\sqrt{b^2+c^2}+b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{2}$.

Nivel U

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función integrable y creciente. Demostrar que

$$\int_0^1 xf(x)dx\ge\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$$

Solución:

Sean $F(x)=\int_0^x tf(t)dt$ y $G(x)=\int_0^x f(t)dt$ con $x\in[0,1]$.

Veamos que $F'(x)=xf(x)=xG'(x)$, pero como $f(x)=G'(x)$ es creciente entonces tenemos que $f(x)\ge f\left(x^2\right)$, ya que $0\le x\le 1$, luego $F'(x)\ge xG'\left(x^2\right)=\dfrac{G\left(x^2\right)'}{2}$, integrando de 0 a 1 se tiene

$$\int_0^1 F'(x)dx\ge\int_0^1\frac{G\left(x^2\right)'}{2}dx\Rightarrow F(1)-F(0)\ge\frac{G\left(1^2\right)-G\left(0^2\right)}{2}\Rightarrow F(1)\ge\frac{G(1)}{2}$$

$$\Rightarrow\int_0^1 xf(x)dx\ge\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$$

Con lo que se ha concluido la demostración.