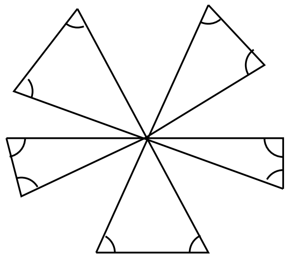
LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha: 2015/Jul/6

Nivel 1

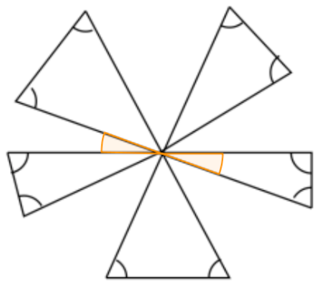
¿Cuál es la suma de los ángulos marcados en la figura?



Solución:

Veamos que hay un total de 5 triángulos. Si estuvieran marcados todos los ángulos de los 5 triángulos la suma de dichos ángulos sería $180^{\circ} \cdot 5 = 900^{\circ}$, pero hay que quitarle a aquella suma los ángulos que tienen vértice en el centro de la figura.

Ahora veamos que hay un total de 10 ángulos que tienen vértice en el centro de la figura y además podemos ver que el opuesto por el vértice a cada uno de los ángulos que están en un triángulo y que tiene vértice en el centro de figura es un ángulo que no está dentro de un triángulo, es decir que la mitad de los 10 ángulos que están en el centro de la figura son los ángulos que no están marcados en los triángulos, pero entonces estos ángulos suman $360^{\circ} \div 2 = 180^{\circ}$.



Con esto la suma de los ángulos que están marcados en la figura es $900^{\circ} - 180^{\circ} = \boxed{720^{\circ}}$.

Nivel 2

Un programa de computadora genera una sucesión de 2005 números, de acuerdo con la siguiente regla: el primer número es 1, y a partir de ahí, luego de generar el número x, el siguiente número es igual a $x + \frac{1}{\lfloor x \rfloor}$. Los primeros números de la sucesión son $1, 2, \frac{5}{2}, 3, \ldots$.

Determinar el último número que genera el programa.

Nota: $\lfloor x \rfloor$ determina la parte entera del número x.

Solución:
Supongamos que un entero n, mayor que 1, aparece en la sucesión, entonces la sucesión continúa de la siguiente forma:

$$\frac{n^2+1}{n}, \frac{n^2+2}{n}, \ldots, \frac{n^2+n}{n}$$

Pero el último término de la lista anterior es igual a $n+1$. Si se representan todos lo términos como fracciones se obtienen fracciones con denominadores:
uno con 1, dos con 2, tres con 3, ..., n con denominador n y así sucesivamente.

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, \ldots, \frac{n^2}{n}, \frac{n^2+1}{n}, \ldots, \frac{n^2+n-1}{n}, \ldots$$

Sea x el último número de la sucesión. Si x tiene denominador k entonces $1+2+\ldots+k \leq 2005$ con lo que $k(k+1) \leq 4010$. Se puede ver que $k=62$ satisface la desigualdad y como la cantidad de términos en la sucesión hasta el último número con denominador 62 es $\frac{62(63)}{2} = 1953$ y $2005-1953=52$ entonces

$$x = \frac{62^2+(52-1)}{63} = \frac{4020}{63} = \boxed{\frac{1340}{21}}$$

<u>Nivel 3</u>
Dado un entero positivo n, considere la sucesión de números reales $a_0, a_1, \ldots, a_n$, definida como $a_0 = \frac{1}{2}$ y $a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n}$ para todo $1 \leq k \leq n$. Demostrar que $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$.

Solución:
Mediante simples manipulaciones algebraicas, la ecuación del problema es equivalente a:

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{n+a_k}$$

Si se suman estas expresiones para $k = 1,2,\ldots,n$ y aplicando la propiedad telescópica de la suma se obtiene $\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+a_k} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} = 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+a_k}$, por lo que basta demostrar que $\frac{n-2}{n-1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+a_k} < 1$.

La parte derecha de la desigualdad se cumple, ya que de acuerdo a las condiciones del problema, la sucesión dada es estrictamente creciente y positiva, por lo que $\frac{1}{n+a_k} < \frac{1}{n}$ para todo $1 \leq k \leq n$, con lo cual se demuestra esta parte. Esto además implica que $a_n < 1$ con lo que $a_k < 1$ para todo $1 \leq k \leq n$.
Para demostrar la parte izquierda de la desigualdad se utiliza este último hecho de la forma $\frac{1}{n+a_k} > \frac{1}{n+1}$ para todo $1 \leq k \leq n$, por lo que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+a_k} > \frac{n}{n+1} > \frac{n-2}{n-1}$.

Nivel U

Sea d un número real. Para cada entero $m \geq 0$ se define la secuencia $\{a_m(j)\}$ para todo entero no negativo j de manera que:

$$a_m(0) = \frac{d}{2^m}$$

$$a_m(j+1) = \left(a_m(j)\right)^2 + 2a_m(j), \quad j \geq 0$$

Evaluar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n(n)$.

Solución:

Definamos otra secuencia $\{b_m(j)\}$ tal que $b_m(j) = a_m(j)+1$. Luego es fácil ver que:

$$b_m(j+1) = a_m(j+1)+1 = \left(a_m(j)\right)^2 + 2a_m(j)+1 = \left(a_m(j)+1\right)^2 = \left(b_m(j)\right)^2, \quad j \geq 0$$

Luego inductivamente se prueba que:

$$b_m(j) = \left(b_m(0)\right)^{2^j} = \left(1+\frac{d}{2^m}\right)^{2^j}, \quad j \geq 0$$

De lo anterior y la definición inicial obtenemos que:

$$a_n(n) = \left(1+\frac{d}{2^n}\right)^{2^n} - 1, \quad n \geq 0$$

Es conocido (se puede obtener con la regla de L'Hôpital) que: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{d}{n}\right)^n = e^d$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$, finalmente concluimos que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(n) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{d}{2^n}\right)^{2^n} = \boxed{e^d - 1}$$