Olimpiada
Matemática
Ecuatoriana

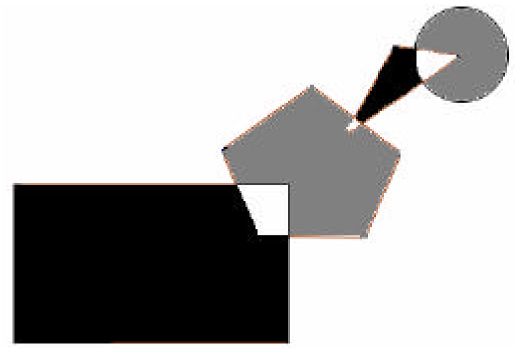
LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Jun/1

Nivel 1

En la figura mostrada se tiene un rectángulo, un pentágono, un triángulo y un círculo con áreas de 121, 81, 49 y 25 respectivamente. Determinar la diferencia entre el área negra y el área gris.



Solución:

Sean a el área negra del rectángulo, b el área blanca del rectángulo, c el área gris del pentágono, d el área blanca del pentágono y que no forma parte del rectángulo, e el área negra del triángulo, f el área blanca del triángulo y que no forma parte del pentágono, g el área gris del círculo, entonces:

$$\begin{cases} a+b=121 \\ b+c+d=81 \\ d+e+f=49 \\ f+g=25 \end{cases}$$

y nos piden determinar $a+e-c-g$.

Sumando la 1ra y la 3ra ecuación se obtiene $a+b+d+e+f=170$ (1)

Sumando la 2da y la 4ta ecuación se obtiene $b+c+d+f+g=106$ (2)

Restando (1) – (2) se obtiene $a+e-c-g=\boxed{64}$.

Nivel 2

Miguel elige un número natural n y hace lo siguiente:

- Calcula $a = n^2 + 5$.
- Calcula $b = (n+1)^2 + 5$
- Halla el máximo común divisor entre a y b para luego anotar dicho máximo común divisor en una pizarra.

¿Cuál es el número más grande que puede anotar?

Solución:

Veamos que $\operatorname{mcd}(a,b) = \operatorname{mcd}\left(n^2+5,(n+1)^2+5\right) = \operatorname{mcd}\left(n^2+5,2n+1\right) = \operatorname{mcd}\left(2n^2+10,2n+1\right)$

Luego $\operatorname{mcd}(a,b) = \operatorname{mcd}(10-n,2n+1) = \operatorname{mcd}(20-2n,2n+1) = \operatorname{mcd}(21,2n+1)$, entonces $\operatorname{mcd}(a,b)$ es como máximo 21, pero eligiendo $n=10$ se encuentra que $\operatorname{mcd}(a,b) = (105,126) = 21$, por lo que el número más grande que Miguel puede anotar es $\boxed{21}$.

Nivel 3

Se dice que un entero positivo es *pieza*, si todos sus dígitos son no nulos, y la suma de los cuadrados de los mismos es un cuadrado perfecto. Demostrar que para todo entero positivo n existe al menos un número *pieza* de n dígitos.

Solución:

Intentaremos construir números *pieza*, a partir del número $\underbrace{555\ldots55}_{k^2\ veces}$, el cual claramente es *pieza*, ya que no tiene dígitos nulos y la suma de los cuadrados de sus dígitos es igual a $(5k)^2$.

Utilizando el conocido hecho de que $3^2+4^2=5^2$ podemos construir números *pieza* con cualquier número de dígitos entre k^2+1 y $2k^2$ de la siguiente manera: a partir de $\underbrace{555\ldots55}_{k^2\ veces}$ elegimos el primer número cinco de izquierda a derecha y lo reemplazamos por los dígitos 3 y 4, de esta manera el número resultante $34\,\underbrace{555\ldots55}_{k^2-1\,veces}$ tiene k^2+1 dígitos todos no nulos y la misma suma de los cuadrados de sus dígitos $(5k)^2$. Si se realiza este mismo proceso repetidamente se logran números de la forma $\underbrace{3434\ldots34}_{x\,veces\,34}\ \underbrace{555\ldots55}_{k^2-x\,veces}$ de k^2+x dígitos, hasta el número $\underbrace{3434\ldots34}_{2k^2 dígitos}$. Basta entonces hallar el mínimo k para el cual este proceso cubre todos los números de dígitos $k^2 < n < (k+1)^2$, es decir, $2k^2 \geq (k+1)^2 - 1$, lo cual se cumple para $k \geq 2$. Por lo tanto, basta encontrar números *pieza* de 1, 2 y 3 dígitos.

Para $n=1$, cualquier entero positivo de un dígito cumple; para $n=2$, 34 cumple; para $n=3$, 221 cumple; para $n \geq 4$ se procede como el proceso indicado anteriormente, por lo tanto se ha demostrado que para todo entero positivo n existe al menos un número *pieza* de n dígitos.

Nivel U

Determinar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con derivada contínua tales que en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$, con $a<b$, existen $m,n\in[a,b]$ tales que

$$f'(m)=\min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{y} \qquad f'(n)=\max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Solución:

Se fija un punto x y se considera un punto y, con $y>x$, entonces se obtienen dos puntos m_y y n_y en el intervalo $[x,y]$ tales que

$$\min_{z\in[x,y]} f(z)=f'\left(m_y\right)\leq f\left(m_y\right)\leq f'\left(n_y\right)=\max_{z\in[x,y]} f(z)$$

Si $y\to x$ entonces $m_y\to x$ y $n_y\to x$. Por la continuidad de f' y por el teorema del emparedado se obtiene

$$\lim_{y\to x} f\left(m_y\right)=\lim_{y\to x} f'\left(m_y\right)=\lim_{y\to x} f'\left(n_y\right)=f'(x)$$

pero como f es contínua, $\lim\limits_{y\to x} f\left(m_y\right)=f(x)$, por lo tanto $f'(x)=f(x)$ para todo x. Es conocido que entonces $\boxed{f(x)=ce^x}$ con $c\in\mathbb{R}$.