Olimpiada
Matemática
Ecuatoriana

LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Jun/15

Nivel 1

En un baúl hay 5 cofres, en cada cofre hay 3 cajas, y en cada caja hay 10 monedas de oro. El baúl, los cofres y las cajas están cerrados con llave. ¿Cuál es la menor cantidad de cerraduras que hay que abrir para obtener 50 monedas?

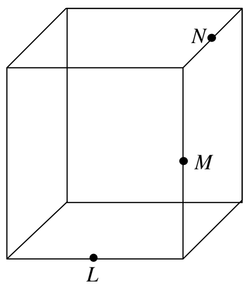
Solución:

Se necesita abrir 5 cajas (5 cerraduras) para completar 50 monedas, ya que cada una de las cajas tienes 10 monedas de oro. Para lograr abrir las 5 cajas y minimizar la cantidad de cerraduras se deberían abrir 2 cofres (2 cerraduras), ya que cada cofre tiene 3 cajas. Para lograr abrir los 2 cofres y minimizar la cantidad de cerraduras se debería abrir el baúl, es decir 1 cerradura.

Entonces en total se abren $5+2+1=\boxed{8\ cerraduras}$.

Nivel 2

Los puntos L, M y N son puntos medios de las aristas del cubo, como muestra la figura. ¿Cuánto mide el ángulo LMN ?



Solución:

Sin pérdida de generalidad definamos la medida de la arista del cubo como 2.

Vemos que $LM=MN=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ y $LN=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$.

Entonces se tiene que el triángulo LMN tiene lados $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{6}$ (opuesto a $\measuredangle LMN$), con lo que por la Ley de Coseno se tiene

$$\left(\sqrt{6}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)\cos\measuredangle LMN \Rightarrow 6=4-4\cos\measuredangle LMN \Rightarrow \cos\measuredangle LMN=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \measuredangle LMN=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\boxed{120^\circ}$$

Nivel 3

Cierto día, algunos habitantes de una ciudad contrajeron una rara enfermedad. Esta enfermedad solo dura un día, y al día siguiente de que una persona haya estado enferma, ésta es inmune al contagio (solo por ese día). La única manera de que una persona se contagie, es si visita a un amigo enfermo. A pesar de la propagación de la enfermedad, cada día, cada persona sana visita a todos sus amigos enfermos (la amistad es mutua). Además luego de que empezó la epidemia, nadie se ha vacunado (la vacuna funciona de manera similar a la enfermedad, solo es efectiva por un día). Demostrar que:

a) Si algunas personas sanas fueron vacunadas al inicio, de manera que el primer día de la enfermedad eran inmunes, entonces la epidemia puede durar para siempre, es decir, es posible que cada día exista al menos una persona enferma.

b) Si nadie era inmune a la enfermedad el primer día, entonces eventualmente la epidemia terminará.

Solución:

a) La epidemia puede durar para siempre en el siguiente caso: supongamos tres personas que son amigas entre sí, y en el primer día, una de ellas estaba enferma, otra había sido vacunada, y otra estaba sana, pero no vacunada. Claramente entre estos tres amigos, cada día habrá una persona sana, pero no inmune, una sana e inmune y otra persona enferma, por lo que la enfermedad se contagia indefinidamente.

b) En este caso, procedemos a demostrar que ninguna persona puede contraer la enfermedad más de una vez. Dividimos la población en grupos $G_1, G_2, \ldots$, en el grupo G_1 se encuentran todas las personas que se enfermaron en el día 1, el grupo G_2 consiste en todas las personas que no están en G_1, pero que son amigas de alguna persona en G_1, el grupo G_3 consiste en todas las personas que no pertenecen a G_1 ni a G_2 y que son amigos de alguna persona en G_2 y así sucesivamente. Si dos personas son amigos, entonces, o pertenecen al mismo grupo, o pertenecen a grupos cuyo índice varía en una unidad. Si dos amigos pertenecen al mismo grupo, nunca se visitarán (ambos estarán sanos o enfermos el mismo día). Se procede a demostrar por inducción que en el día k solo las personas del grupo G_k están enfermas y solo las personas del grupo G_{k-1} son inmunes.
El caso $k = 2$ es trivial. Supongamos que es cierto para $k = n$, es decir, las personas que pertenecen a G_n están enfermas y las que pertenecen a G_{n-1} son inmunes en el día n, en este día, solo las personas de los grupos G_{n-1} y G_{n+1} visitan a los enfermos del grupo G_n (por la definición de los grupos), ya que los únicos amigos sanos de las personas de G_n se encuentran en estos, pero solo las personas de G_{n+1} se contagian, porque las otras son inmunes por ese día. De esta manera, al día siguiente, es decir el día $n+1$ solo las personas del grupo G_{n+1} estarán enfermas y las personas del grupo G_n serán inmunes. Lo que concluye la demostración. Además, como existe un número finito de habitantes en la ciudad, y cada habitante pertenece a exactamente un grupo, se concluye que la enfermedad eventualmente dejará de propagarse.

Nivel U

Calcular $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx$.

Solución:

Sea I la integral, y sea $t=\frac{\pi}{4}-x$, entonces la integral se convierte en

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)(-1)\,dt$$

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)dt$$

$$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{1+\tan t}\,dt$$

$$I=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$$

Despejando I se obtiene $I=\boxed{\frac{\pi}{8}\ln 2}$.