LISTA SEMANAL
Soluciones

Fecha:
2015/Jun/22

Nivel 1
Considerar todos los números que se pueden escribir usando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6 exactamente una vez cada uno de ellos. ¿Cuántos de estos números de seis dígitos son múltiplos de 6?

Solución:
Primero veamos que para que un número sea múltiplo de 6 debe ser múltiplo de 2 y de 3.
Si se usa exactamente una vez cada uno de los números del 1 al 6 entonces la suma de los dígitos de dichos números es $1+2+3+4+5+6=21$ que es múltiplo de 3, con esto se obtiene que el número será siempre múltiplo de 3, entonces sólo falta que el número sea múltiplo de 2, pero para esto solo es necesario que el número termine en una cifra par, con lo que se tienen 3 opciones para la última cifra (2, 4 o 6), y luego se tienen que reordenar las restantes 5 cifras para formar el número y sabemos que esto se puede hacer de $5!$ formas, entonces por el principio fundamental del conteo se tiene que la cantidad de números es $\boxed{3\bullet 5!}$.

Nivel 2
Demostrar que el número
$$2^{2005}+4^{2005}+6^{2005}+\ldots+2006^{2005}$$
es múltiplo de $2+4+6+\ldots+2006$.

Solución:
Primero veamos que en la suma $2+4+6+\ldots+2006$ hay 1003 sumandos, entonces

$$2+4+\ldots+2006=\frac{1003}{2}(2+2006)=\frac{1003\bullet 2008}{2}=1003\bullet 1004$$

Entonces hay que demostrar que $E=2^{2005}+4^{2005}+6^{2005}+\ldots+2006^{2005}$ es múltiplo de $1003\bullet 1004$, es decir que es múltiplo de 1003 y también de 1004.

Primero se demostrará que E es múltiplo de 1004.

Veamos que
$$2\equiv -2006(\operatorname{mod}1004)\Rightarrow 2^{2005}\equiv(-2006)^{2005}(\operatorname{mod}1004)\Rightarrow 2^{2005}\equiv -2006^{2005}(\operatorname{mod}1004)$$

Así mismo se puede obtener

$$4^{2005} \equiv -2004^{2005} \pmod{1004}$$
$$6^{2005} \equiv -2002^{2005} \pmod{1004}$$
$$\vdots$$
$$1002^{2005} \equiv -1006^{2005} \pmod{1004}$$

Además

$$1004^{2005} \equiv 0 \pmod{1004}$$

Sumando todas las congruencias se obtiene

$$2^{2005} + 4^{2005} + \ldots + 1004^{2005} \equiv -1006^{2005} - 1008^{2005} - \ldots - 2006^{2005} \pmod{1004}$$
$$\Rightarrow 2^{2005} + 4^{2005} + \ldots + 1004^{2005} + 1006^{2005} + 1008^{2005} + \ldots + 2006^{2005} \equiv 0 \pmod{1004}$$

Con lo que 1004 divide a E.

Finalmente se demostrará que E es múltiplo de 1003. Veamos que

$$2 \equiv -2004 \pmod{1003} \Rightarrow 2^{2005} \equiv (-2004)^{2005} \pmod{1003} \Rightarrow 2^{2005} \equiv -2004^{2005} \pmod{1003}$$

Así mismo se puede obtener

$$4^{2005} \equiv -2002^{2005} \pmod{1003}$$
$$6^{2005} \equiv -2006^{2005} \pmod{1003}$$
$$\vdots$$
$$1002^{2005} \equiv -1004^{2005} \pmod{1003}$$

Además

$$2006^{2005} \equiv 0 \pmod{1003}$$

Sumando todas las congruencias se obtiene

$$2^{2005} + 4^{2005} + \ldots + 1002^{2005} + 2006^{2005} \equiv -1004^{2005} - 1006^{2005} - \ldots - 2004^{2005} \pmod{1003}$$
$$\Rightarrow 2^{2005} + 4^{2005} + \ldots + 1004^{2005} + 1006^{2005} + 1008^{2005} + \ldots + 2006^{2005} \equiv 0 \pmod{1003}$$

Con lo que 1003 divide a E. Y con esto se concluye la demostración.

<u>Nivel 3</u>

Sea $n > 1$ un entero impar. Demostrar que n no divide a $3^n + 1$.

Solución:

Supongamos lo contrario, es decir, existe un entero impar n que divide a $3^n + 1$. Sea p el menor divisor primo de n. Se tiene entonces que $3^n \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow 3^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$. Además, por el pequeño teorema de Fermat se tiene $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Esto implica:

$$3^{\operatorname{mcd}(2n, p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$$

Como p es el menor divisor primo de n se tiene que $\operatorname{mcd}(n, p-1) = 1$, lo que implica $\operatorname{mcd}(2n, p-1) = 2$. Es decir $3^2 \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow 8 \equiv 0 \pmod{p}$, contradicción!, ya que p es un primo impar.

Nivel U
Considerar la matriz compleja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^{2004}.

Solución:
Veamos que

$$A^4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^{4k} = \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix}$$

con lo que para $k = 501$ se obtiene

$$A^{2004} = \begin{pmatrix} (-4)^{501} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^{501} \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^{2004} = \boxed{\begin{pmatrix} -2^{1002} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{1002} \end{pmatrix}}$$