LISTA SEMANAL
Soluciones

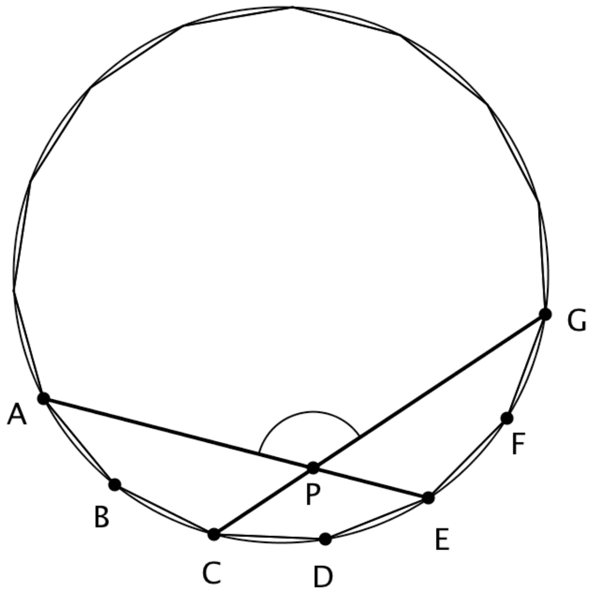
Fecha:
2015/Jun/29

Nivel 1

Sean A, B, C, D, E, F, G siete vértices consecutivos de un polígono regular de 15 lados. Las diagonales AE y CG se cortan en P. Calcular la amplitud del ángulo APG.

Solución:

Recordemos que todo polígono regular tiene una circunferencia que pasa por todos sus vértices (circunferencia circunscrita) y cada lado es una cuerda de dicha circunferencia y como todas son iguales entonces subtienden arcos iguales $\left(\frac{1}{15}360^\circ\right)$, por esto



$$\overset{\frown}{CE} \to \frac{2}{15}360^\circ$$

$$\overset{\frown}{GA} \to \frac{9}{15}360^\circ$$

Por otro lado se sabe que

$$\measuredangle APG = \frac{\overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{GA}}{2}$$

Entonces

$$\measuredangle APG = \frac{\frac{2}{15}360^\circ + \frac{9}{15}360^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \measuredangle APG = \frac{11}{30}360^\circ = \boxed{132^\circ}$$

Nivel 2

Sea $S(n)$ la suma de los dígitos de n. Si $S(n) = S(2n)$, demostrar que $9 \mid n$.

Solución:

Se conoce que $n \equiv S(n) (\bmod 9)$ así mismo $2n \equiv S(2n) (\bmod 9)$, como $S(n) = S(2n)$ entonces $S(n) \equiv S(2n) (\bmod 9)$ por lo que $n \equiv 2n (\bmod 9)$ de aquí $0 \equiv n (\bmod 9)$ con lo que se concluye que n es múltiplo de 9.

Nivel 3

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una sucesión de enteros tales que:

(i) $-1 \le x_i \le 2$; $i = 1,2,\ldots,n$

(ii) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 19$

(iii) $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 99$

Hallar los valores máximos y mínimos que puede tomar la expresión $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3$.

Solución:

Sean a,b,c la cantidad de -1s, 1s y 2s en la sucesión respectivamente. Como se observará a continuación, no se necesita establecer el número de 0s. Entonces a,b,c son enteros no negativos que satisfacen:

$$\begin{cases} -a + b + 2c = 19 \\ a + b + 4c = 99 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema en función de c se obtiene $a = 40 - c$ y $b = 59 - 3c$, por lo que $0 \le c \le 19$, entonces $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = -a + b + 8c = 19 + 6c$.

El mínimo se alcanza cuando $c = 0$ $(a = 40, b = 59)$ y la suma de los cubos toma el valor de $\boxed{19}$. El máximo se alcanza cuando $c = 19$ $(a = 21, b = 2)$, y la suma de los cubos toma el valor de $\boxed{133}$.

Nivel U

Sea C la circunferencia unitaria centrada en el origen. Un punto P se escoge aleatoriamente sobre la circunferencia C y otro punto Q se escoge aleatoriamente en el interior de la circunferencia C, ambos puntos se escogen independientes entre sí y uniformemente sobre sus respectivos dominios. Sea R un rectángulo que tiene los lados paralelos a los ejes cartesianos y PQ es una diagonal. ¿Cuál es la probabilidad de que R no tenga ningún punto fuera de la circunferencia C?

Solución:

Sin pérdida de generalidad, supongamos que P esté en el primer cuadrante y sean (x,y) sus coordenadas. Consideremos el rectángulo R' cuyos vértices son los puntos con coordenadas $(x,y),(-x,y),(-x,-y),(x,-y)$, es fácil ver que si Q se encuentra en el interior del rectángulo R' o en su perímetro, luego el rectángulo R no tiene ningún punto fuera de la circunferencia C. Para este punto considerado, el área de acierto es igual al área del rectángulo $4xy$ y el área total es π, por ende para este punto fijo la probabilidad buscada es $\dfrac{4xy}{\pi} = \dfrac{4}{\pi}\cos\theta\sin\theta$.

Como P se distribuye uniformemente sobre la circunferencia, θ es una variable aleatoria uniforme en $[0, 2\pi]$. El argumento anterior se repite en los otros cuadrantes y por la simetría se puede evaluar en el primer cuadrante y multiplicar por 4.

La probabilidad p buscada es la integral de la probabilidad para cada punto normalizada para el perímetro del dominio $p = \dfrac{4}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{4}{\pi}\cos\theta\sin\theta\, d\theta = \dfrac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)\, d\theta = \boxed{\dfrac{4}{\pi^2}}$.