LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Jun/8

Nivel 1

Determinar la mayor potencia de 2 que divide a $2011^{2012}-1$.

Solución:
Para analizar la mayor potencia de 2 que divide a la expresión es necesario encontrar cuántas veces aparece el factor 2 en dicha expresión, para realizar esto se podría considerar la factorización de la expresión.

$$\begin{aligned}2011^{2012}-1&=\left(2011^{1006}+1\right)\left(2011^{1006}-1\right)\\&=\left(2011^{1006}+1\right)\left(2011^{503}+1\right)\left(2011^{503}-1\right)\\&=\left(2011^{1006}+1\right)\left(2011^{503}+1\right)(2011-1)\left(2011^{502}+2011^{501}+\ldots+2011+1\right)\end{aligned}$$

Evidentemente el último factor es impar, por lo que de este no se obtendrá ningún factor 2 ya que hay un total de 503 sumandos impares entonces dicha operación es impar.

Bastará con analizar los factores 2 en: $2011^{1006}+1$, $2011^{503}+1$ y en $2011-1$.

- $2011^{1006}+1=\left(2011^{2}\right)^{503}+1=\left(2011^{2}+1\right)\left(\left(2011^{2}\right)^{502}-\left(2011^{2}\right)^{501}+\ldots-\left(2011^{2}\right)^{1}+1\right)$
  pero el segundo factor tiene 503 sumandos impares entonces dicha operación es impar, con lo que no aportará con ningún factor 2, y veamos que $2011^{2}+1=4044122$ que tiene un solo factor 2.

- $2011^{503}+1=(2011+1)\left(2011^{502}-2011^{501}+\ldots-2011^{1}+1\right)$ pero el segundo factor tiene 503 sumandos impares entonces dicha operación es impar, con lo que no aportará con ningún factor 2, y veamos que $2011+1=2012$ que tiene 2 factores 2.

- $2011-1=2010=2\bullet 1005$ entonces este factor tiene solo un factor 2.

Entonces tenemos un total de $1+2+1=4$ con lo que la mayor potencia que divide a dicha expresión es $\boxed{2^{4}}$.

Nivel 2
Determinar todos los enteros positivos n para los cuales existen n enteros positivos consecutivos cuya suma es un número primo.

Solución:
La suma de los n enteros positivos consecutivos $a+1, a+2, \ldots, a+n$ (con $a \in \mathbb{Z}_0^+$) es

$$\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\ sumandos}+\underbrace{1+2+\ldots+n}_{n\ sumandos}=an+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{2an+n(n+1)}{2}$$

Si p es el primo que se debe obtener como suma, entonces

$$\frac{2an+n(n+1)}{2}=p \Rightarrow 2an+n(n+1)=2p \Rightarrow n(2a+n+1)=2p \quad (1)$$

Veamos que $n<2a+n+1$ y que $2 \le p$ entonces por (1) se tienen las siguientes únicas opciones:

- $n=1$
  En este caso se tiene que seleccionar un solo entero positivo que sea primo, con lo que se demostraría la existencia de lo que pide el problema.
- $n=2$
  En este caso se tienen que seleccionar dos enteros positivos consecutivos cuya suma sea un primo y se puede ver que 1, 2 funciona ya que da 3 la suma, lo que es un primo.

Entonces los únicos valores de n que cumplen son $\boxed{n=\{1,2\}}$.

Nivel 3
La sucesión infinita de números reales $a_0, a_1, a_2, \ldots$ se define como:

$$a_{k+1}=\lfloor a_k \rfloor \{a_k\}, \text{ para todo } k \ge 0$$

Donde a_0 es un número real arbitrario, $\lfloor a_k \rfloor$ representa el mayor entero menor o igual que a_k y $\{a_k\}=a_k-\lfloor a_k \rfloor$. Demostrar que $a_k=a_{k+2}$ para un valor suficientemente grande de k.

Solución:
Consideremos primero el caso $a_0 \ge 0$. En este caso, todos los a_k son no negativos. Se observa claramente que si algún a_k está en el intervalo $[0,1]$, todos los términos a partir de este, serán iguales a cero y se satisfará $a_k=a_{k+2}=0$ para todo k a partir de ese punto. Esto siempre sucederá en este caso debido a la siguiente desigualdad

$$\lfloor a_{k+1} \rfloor \le a_{k+1}=\lfloor a_k \rfloor \{a_k\} < \lfloor a_k \rfloor$$

Es decir, la sucesión de enteros no negativos $\lfloor a_k \rfloor$ es estrictamente decreciente, por lo que eventualmente alcanzará su valor mínimo, es decir $\lfloor a_k \rfloor=0$ para algún k suficientemente grande.

Consideremos ahora $a_0<0$. Es claro que $a_k \le 0$ para todo k. Supongamos además que la sucesión nunca es cero. En este caso, para todo k se satisface la siguiente desigualdad:

$$1+\lfloor a_{k+1} \rfloor > a_{k+1}=\lfloor a_k \rfloor \{a_k\} > \lfloor a_k \rfloor$$

Lo que implica que la sucesión de enteros $\lfloor a_k \rfloor$ es no decreciente, ya que esta sucesión está acotada superiormente por -1, eventualmente esta será constante, es decir:

$\lfloor a_k \rfloor = c$, para $k \geq k_0$, donde c es un entero negativo y k_0 un entero no negativo

Se tendrá entonces para $k \geq k_0$:

$$a_{k+1} = c\{a_k\} = ca_k - c^2$$

Desarrollando los términos siguientes a partir de a_{k_0} se llega a la siguiente conclusión:

$$a_{k_0+j} = c^j\left(a_{k_0} - \frac{c^2}{c-1}\right) + \frac{c^2}{c-1}, \text{ para todo } j \geq 0$$

Tomando en cuenta que para cada $k \geq k_0$, $c \leq a_k < c+1$ se concluye que $a_{k_0} = \dfrac{c^2}{c-1}$ ó $c = -1$.

En el primer caso se tiene que $a_k = \dfrac{c^2}{c-1}$ para todo $k \geq k_0$ lo que demuestra lo que pide el problema.

En el segundo caso se tiene:

$$a_k = \begin{cases} a_{k_0} & \text{para } k - k_0 \text{ par} \\ 1 - a_{k_0} & \text{para } k - k_0 \text{ impar} \end{cases}$$

Lo que también cumple con lo que pide demostrar el problema.

Nivel U

Hallar todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes enteros tales que $P(P'(x)) = P'(P(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución:

Primero se va a considerar el caso $n \geq 2$.

Sea $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ con $a_n \neq 0$, entonces

$$P'(x) = na_n x^{\mathrm{n}-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$$

Identificando los coeficientes de $x^{n(n-1)}$ en la igualdad $P(P'(x)) = P'(P(x))$ se obtiene que $a_n{}^{n+1} \bullet n^n = a_n{}^n \bullet n$, esto implica que $a_n n^{n-1} = 1$ entonces $a_n = \dfrac{1}{n^{n-1}}$, pero como a_n es un entero entonces n debe ser igual a 1, lo que es una contradicción.

Si $n = 1$ entonces $P(x) = ax + b$ con lo que $a^2 + b = a$, entonces $b = a - a^2$, con lo que la respuesta al problema son los polinomios de la forma $\boxed{P(x) = ax + a - a^2}$.