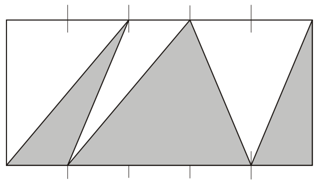
LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Mar/2

Nivel 1

Si el área del rectángulo dado es 12 y además se tiene que los lados horizontales han sido divididos en 5 partes iguales tal y como muestra la figura.



¿Cuál es el área de la figura sombreada?

Solución:

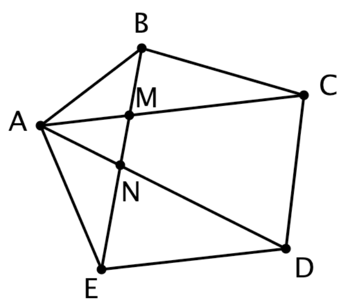
Hay que notar que la figura sombreada está formada por 3 triángulos cuyas alturas miden lo mismo (Iguales a la altura del rectángulo), con lo que para obtener el área sombreada bastaría con sumar las bases y multiplicarlo por la altura y dividirlo para 2, pero la suma de las bases de los 3 triángulos es igual a la base del rectángulo.

Entonces al multiplicar la suma de las bases por la altura se obtendrá 12 (Por ser el área del rectángulo) con lo que falta dividir para 2, y se obtiene $\boxed{6}$ que es el área de la figura sombreada.

Nivel 2

Sea $ABCDE$ un pentágono tal que los triángulo ABC, BCD, CDE, DEA y EAB tienen la misma área. Suponga que AC y AD intersectan a BE en los puntos M y N, respectivamente. Demostrar que $BM = EN$.

Solución:



Como $(BCD) = (CDE)$ y ambos triángulos comparten el lado CD entonces $CD \parallel BE$.

Análogamente se obtiene que $BC \parallel AD$, $DE \parallel AC$.

Con lo anterior se obtiene que $BCDN$ y $MCDE$ son paralelogramos y por esto $BN = CD$ y además que $EM = CD$, luego $BN = EM$ es decir que $BM + MN = MN + EN$ por lo que $BM = EN$.

Nivel 3
Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfacen $f(x-y)-xf(y)\le 1-x$, para todo $x,y\in\mathbb{R}$.

Solución:
Claramente la función $f(x)=1$ para todo x satisface la desigualdad. Tratemos de hallar otra solución:
Reemplazando $x=0$, $y=-t$ se tiene $f(t)\le 1$ para todo $t\in\mathbb{R}$.
Reemplazando $x=2t$, $y=t$ se tiene $(1-2t)\left[f(t)-1\right]\le 1$, lo que implica, combinando con lo anterior, que para todo $t>\frac{1}{2}$ se tiene $f(t)\ge 1$, es decir, $f(t)=1$ para todo $t>\frac{1}{2}$.
Si $t\le\frac{1}{2}$ se tiene $2-t>1$ por lo que $f(2-t)=1$.
Entonces $f(2-t)-2f(t)\le 1-2 \Leftrightarrow f(t)\ge 1$, es decir, para $t\le\frac{1}{2}$ también se tiene $f(t)=1$.
Con lo que se concluye que la única solución es $f(x)=1$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Nivel U
Demostrar que la ecuación
$$\left(x_1+x_2\sqrt{7}\right)^{2008}+\left(y_1+y_2\sqrt{7}\right)^{2008}=29+11\sqrt{7}$$
no puede satisfacerse con valores racionales de x_1, x_2, y_1, y_2.
(Ronda Clasificatoria de Colombia 2008 – Nivel Universitario - Problema 5)

Solución:
Si la ecuación dada tiene una solución (a_1,a_2,b_1,b_2) entonces $(a_1,-a_2,b_1,-b_2)$ es una solución de la ecuación $\left(x_1+x_2\sqrt{7}\right)^{2008}+\left(y_1+y_2\sqrt{7}\right)^{2008}=29-11\sqrt{7}$.
Pero la última ecuación no tiene soluciones porque la parte de la izquierda es una suma de potencias pares por lo que se obtiene que es mayor o igual a cero y la parte de la derecha es menor que cero, con lo que se obtiene una contradicción, entonces no hay soluciones en los racionales.