Olimpiada Matemática Ecuatoriana

LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Mar/23

Nivel 1

Las letras a,b,c,d,e,f,g,h representan números que cumplen

$$a=100\,;\ b=\frac{2}{a}\,;\ c=\frac{3}{b}\,;\ d=\frac{4}{c}\,;\ e=\frac{5}{d}\,;\ f=\frac{6}{e}\,;\ g=\frac{7}{f}\,;\ h=\frac{8}{g}$$

Hallar $abcdefgh$.

Solución:

Veamos que:

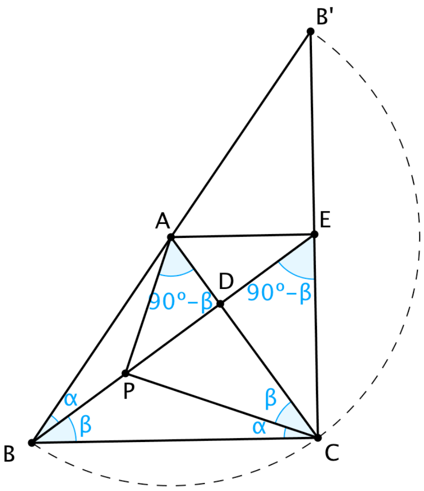
$$b=\frac{2}{a}\Rightarrow ab=2\,;\ d=\frac{4}{c}\Rightarrow cd=4\,;\ f=\frac{6}{e}\Rightarrow ef=6\,;\ h=\frac{8}{g}\Rightarrow gh=8$$

Multiplicando las 4 ecuaciones se obtiene $abcdefgh=2\bullet 4\bullet 6\bullet 8=\boxed{384}$.

Nivel 2

Sea ABC un triángulo isósceles con $AB=AC$. El punto D está en AC y P en BD tal que $\measuredangle APC=90^\circ$. Si $\measuredangle ABP=\measuredangle BCP$, determinar $\dfrac{AD}{CD}$.

Solución:



Sea la circunferencia τ con centro A y radio $AB \Rightarrow C\in\tau$. Sea BB' diámetro de τ, entonces A es el punto medio de BB'. Sea $\measuredangle ABP=\measuredangle BCP=\alpha$ y $\measuredangle CBP=\beta$.

Como ABC es isósceles $\Rightarrow \measuredangle ACB=\measuredangle ABC=\alpha+\beta$ por lo que $\measuredangle ACP=\beta$, como $\measuredangle APC=90^\circ$ entonces

$$\measuredangle CAP=90^\circ-\beta \qquad (1)$$

Veamos que $BB'C$ es rectángulo por estar inscrito en una semicircunferencia entonces $\measuredangle BCB'=90^\circ$ y como $\measuredangle CBE=\beta \Rightarrow BEC=90^\circ-\beta$ (2)

Por (1) y (2) se obtiene que $AECP$ es cíclico y como $\measuredangle APC=90^\circ \Rightarrow \measuredangle AEB'=90^\circ \Rightarrow AE\parallel BC$ entonces AE es paralela media en $BB'C$ con lo que E es el punto medio de $B'C$, entonces BE y AC son medianas en $BB'C$ entonces D es el baricentro de dicho triángulo entonces $\dfrac{AD}{CD}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

Nivel 3

En el país OMEC hay diez ciudades. Dos aerolíneas proveen los servicios de vuelo entre estas ciudades. Para cada par de ciudades existe una y solo una aerolínea que provee un vuelo directo entre ellas (ida y vuelta). Demostrar que una aerolínea puede proveer dos ciclos de viaje, con cada ciclo constando de un número impar de ciudades, de manera que estos ciclos no tengan ciudades comunes entre sí.

NOTA: Se define ciclo a un viaje que parte de una ciudad, pasa por una sucesión de ciudades exactamente una vez, y vuelve a la ciudad inicial.

Solución:

Consideremos el sistema de ciudades y viajes como un grafo completo, cuyos vértices son las diez ciudades y las aristas los vuelos entre cada par de ciudades. Las aristas son coloreadas (de azul o de rojo) dependiendo de cual de las dos aerolíneas provee el servicio de vuelo entre cada par de ciudades. El problema se reduce a demostrar que para un color existen dos sub-ciclos monocromáticos impares sin ningún vértice en común.

Previo a la solución del problema, demostraremos los dos siguientes, bien conocidos resultados:

LEMA 1: En un grafo completo de seis vértices, cuyas aristas se pintan con dos colores, existe un triángulo monocromático.

Demostración: Supongamos lo contrario, tratemos de construir un ejemplo de grafo completo de seis vértices sin triángulos monocromáticos. Sean $A_0, A_1, \ldots, A_5$ los vértices de este grafo. Consideremos las aristas que conectan A_0 con los demás vértices. Por el principio del palomar, al menos tres de estas aristas son de un mismo color, supongamos, sin pérdida de generalidad, rojo. Entre cada uno de los vértices conectados a A_0 por una arista roja, no puede existir una arista roja, ya que entonces se formaría un triángulo monocromático rojo, por lo tanto, estos tres vértices están conectados por aristas azules, pero entonces el triángulo formado por estos tres vértices sería monocromático azul. ¡Contradicción! Por lo tanto, se demuestra el enunciado del LEMA 1.

LEMA 2: En un grafo completo de cinco vértices, cuyas aristas se pintan con dos colores, si no existe ningún triángulo monocromático, entonces el grafo consiste de dos ciclos monocromático de longitud cinco.

Demostración: Se observa fácilmente, que si algún vértice está conectado a por lo menos tres de los otros cuatro vértices restantes con aristas de un mismo color, entonces necesariamente existirá un triángulo monocromático. Esto se demuestra de manera análoga al LEMA 1. Por lo tanto, cada vértice se encuentra conectado a los otros cuatro por exactamente dos aristas rojas y dos azules. Si se observa el sub-grafo constituido por las aristas de un solo color (sin pérdida de generalidad, rojo), este consiste en un grafo, con cada vértice de grado dos, por lo tanto, tiene exactamente cinco aristas. Es inmediato deducir que dichas características garantizan que se forme un ciclo rojo de longitud cinco. Análogamente, existe también un ciclo azul de longitud cinco.

Ahora se procede a demostrar el problema. Denotemos los vértices como $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ y supongamos sin pérdida de generalidad que A_1, A_2, A_3 forman un triángulo monocromático rojo (esto siempre es posible, por el LEMA 1). Si consideramos el grafo formado al retirar estos tres vértices, entre los siete vértices restantes también se forma un triángulo monocromático (otra vez por el LEMA 1), sea, sin pérdida de generalidad A_4, A_5, A_6. Si ambos triángulos fueran del mismo color, el problema estaría demostrado. Suponemos ahora que estos dos triángulos monocromáticos son de colores distintos. Consideremos las aristas que unen cada punto de un triángulo monocromático, con el otro. De estas nueve aristas, al menos cinco son de un mismo color, sea sin pérdida de generalidad, azul, por lo que alguno de los vértices del triángulo rojo se conecta con al menos dos vértices del triángulo azul con aristas azules, con esto se demuestra que existen dos triángulos monocromáticos de distintos colores con un vértices en común, por lo tanto, existen cinco vértices entre los cuales se forma un triángulo monocromático azul y uno rojo. Al retirar esos cinco vértices, los otros cinco restantes forman o un triángulo monocromático, o un ciclo monocromático de longitud cinco (por el LEMA 2). En cualquiera de los dos casos elige un triángulo o ciclo de cinco de un conjunto, y un triángulo monocromático del mismo color del anterior en el otro conjunto y el problema está demostrado.

Nivel U

Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x - 1 - x}{\left(e^x - 1\right)x} dx$.

(Olimpiada Brasileña 2006 – Nivel Universitario – 1ra Fase – Problema 1)

Solución:

Sea $f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{\left(e^x - 1\right)x}$.

Se tiene $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - 1 + x}{\left(e^{-x} - 1\right)(-x)} = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{\left(e^x - 1\right)x}$ luego $f(x) + f(-x) = \dfrac{xe^x - x}{\left(e^x - 1\right)x} = 1$, así se obtiene que

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x - 1 - x}{\left(e^x - 1\right)x} dx = \int_{-1}^{1} f(x) dx = \int_{0}^{1} \left(f(x) + f(-x)\right) dx = \int_{0}^{1} 1 dx = \boxed{1}$$