Olimpiada Matemática Ecuatoriana

LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Mar/9

Nivel 1

La sucesión $121, 1221, 12221, \ldots$ contiene todos los números de la forma $1\underbrace{222\ldots22}_{n\ dígitos\ 2}1$. La cantidad de dígitos 2 indica la posición del número en la sucesión. Por ejemplo, el número 12222221 es el sexto término de la secuencia.

(a) Dentro de los 2009 primeros términos de la sucesión, ¿cuántos son divisibles por 3?

(b) ¿Cuál es el menor número múltiplo de 1001 de la sucesión?

Solución:

(a) Un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3, por lo que el primer término múltiplo de 3 es 1221, ya que $1+2+2+1=6$ que es múltiplo de 3. El siguiente es el mismo con 3 dígitos 2, y así sucesivamente. Como se pide cuántos múltiplos de 3 hay, entonces hay un total de $\frac{2009-2}{3}+1=\frac{2007}{3}+1=669+1=\boxed{670}$.

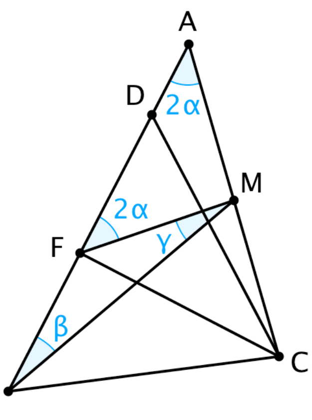
(b) Se puede ver que 1222221 es múltiplo de 1001, ya que es $1221(1001)$ y luego es fácil comprobar que los términos anteriores no son múltiplos de 1001, con lo que $\boxed{1222221}$ es el menor número múltiplo de 1001 de la sucesión.

Nivel 2

Sea ABC un triángulo tal que $AB > AC > BC$. Sea D un punto sobre el lado AB de tal manera que $CD = BC$, y sea M el punto medio del lado AC. Demostrar que $BD = AC$ si y sólo si $\measuredangle BAC = 2\measuredangle ABM$.

(Olimpiada de Mexico 2007 – Problema 6)

Solución:



Sea CF la altura desde C. Sean $\measuredangle BAC = 2\alpha$, $\measuredangle ABM = \beta$ y $\measuredangle FMB = \gamma$.

Como el triángulo ACF es rectángulo entonces M es su circuncentro, por lo que $FM = \frac{1}{2}AC$. Por otro lado se tiene que $\measuredangle MFA = 2\alpha$, además se tiene que $\measuredangle MFA$ es exterior al triángulo MFB por lo que $2\alpha = \beta + \gamma$, por lo tanto

$$BD = AC \Leftrightarrow BF = FM \Leftrightarrow \beta = \gamma \Leftrightarrow \beta = \alpha \Leftrightarrow 2\beta = 2\alpha$$
$$\Leftrightarrow 2\measuredangle ABM = \measuredangle BAC$$

Nivel 3

Las casillas de un tablero de 2015×2015 se pintan de negro o de blanco de acuerdo a la siguiente regla: cada sub-tablero de 2×2 (cuatro casillas con un vértice común) debe tener exactamente dos casillas blancas y dos negras. ¿De cuántas maneras puede colorearse el tablero?

Solución:

Consideremos la coloración de la fila inferior, hay dos alternativas, mutuamente excluyentes: que existan al menos dos casillas contiguas del mismo color, o que las casillas estén pintadas alternadamente de blanco y negro. Para cualquier coloración de la fila inferior que pertenezca a la primera alternativa, la coloración del tablero resulta única. Para verificar esto basta observar dos casillas contiguas pintadas del mismo color en la fila inferior, es claro que las casillas ubicadas en las mismas posiciones en la fila inmediata superior quedan totalmente determinadas, esto a su vez determina las casillas adyacentes, y así sucesivamente. En este caso existen $2^{2015}-2$ maneras de colorear el tablero (2^{2015} coloraciones posibles, sin ninguna restricción de la fila inferior, menos la cantidad de estas coloraciones que sean alternadas, es decir 2). Para el segundo caso, se observa que si la fila inferior es alternada, entonces todas las filas del tablero son coloreadas de manera alternada, por lo tanto existen 2^{2015} posibles coloraciones para este caso (2 posibles coloraciones para cada fila).

Por lo tanto, en total existen $2^{2015}-2+2^{2015}=\boxed{2^{2016}-2}$ manera de colorear el tablero.

Nivel U

Sea $f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}^{+}$ una función con segunda derivada y que satisface la condición

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(f'(x)\right)^{2}}{f''(x)f(x)}=\infty$$

Encontrar, si existe, el valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x f'(x)}{f(x)}$.

(Ronda Final de Colombia 2008 – Nivel Universitario - Problema 4)

Solución:

Derivando $\left(\dfrac{f'}{f}\right)'=\dfrac{f''f-(f')^{2}}{f^{2}}=\left(\dfrac{f'}{f}\right)^{2}\left(\dfrac{f''f}{(f')^{2}}-1\right)$ y definiendo $h(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ se obtiene $\dfrac{h'}{h^{2}}=\dfrac{f''f}{(f')^{2}}-1$, ahora es fácil ver que la condición del problema queda $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{h'(x)}{h^{2}(x)}=-1$.

Como $\left(h^{-1}(x)\right)'=-\dfrac{h'(x)}{h^{2}(x)}$, se obtiene $\lim\limits_{x\to\infty}\left(h^{-1}(x)\right)'=1$, de donde se puede deducir que $\lim\limits_{x\to\infty}h^{-1}(x)=\infty$ y por lo tanto es posible aplicar l'Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{h^{-1}(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}x'}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(h^{-1}(x)\right)'}=\frac{1}{1}=\boxed{1}$$