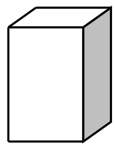
Olimpiada Matemática Ecuatoriana

LISTA SEMANAL
Soluciones

Fecha: 2015/Nov/23

Nivel 1
En la figura se muestra una pieza de madera de dimensiones $1\times 2\times 3$. ¿Cuál es la mínima cantidad de piezas como esa que se necesitan para construir un cubo?

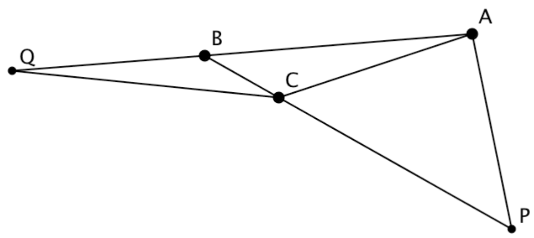


Solución:
El volumen de cada pieza es $1\bullet 2\bullet 3=6$, así que el volumen del cubo tiene que ser un entero divisible por 6 y además que sea cubo perfecto. El menor número que cumple es 216 (ya que es 6^3). Es fácil ver que con $\boxed{36}$ piezas como la indicada, es posible construir dicho cubo.

Nivel 2
Las medidas de los ángulos del triángulo ABC son tales que $\measuredangle A<\measuredangle B<90^\circ<\measuredangle C$. Las bisectrices externas de los ángulos $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$ intersectan a las prolongaciones de los lados opuestos BC y AB en los puntos P y Q respectivamente. Si se sabe que $AP=CQ=AC$, determinar las medidas de los ángulos del triángulo ABC.

Solución:
Por ser CQ bisectriz externa de $\measuredangle ACB$, se tiene que

$$\measuredangle ACQ=\measuredangle ACB+\frac{180^\circ-\measuredangle ACB}{2}=90^\circ+\frac{\measuredangle ACB}{2}$$



Luego, en el triángulo isósceles ACQ con $\measuredangle BAC=\measuredangle AQC$ se tiene que

$$2\measuredangle BAC+90^\circ+\frac{\measuredangle ACB}{2}=180^\circ$$

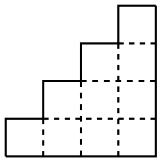
Análogamente, siendo AP bisectriz externa de $\measuredangle BAC$ tenemos que $\measuredangle CAP=\dfrac{180^\circ-\measuredangle BAC}{2}$ y en el triángulo isósceles PAC con $\measuredangle ACP=\measuredangle APC=180^\circ-\measuredangle ACB$ tenemos que

$$\frac{180^\circ-\measuredangle BAC}{2}+2(180^\circ-\measuredangle ACB)=180^\circ$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene $\boxed{\measuredangle BAC=12^\circ,\ \measuredangle ACB=132^\circ \text{ y } \measuredangle ABC=36^\circ}$.

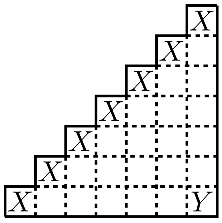
Nivel 3

¿Para qué enteros positivos n puede cubrirse una escalera como la de la figura (con $n=4$) con n cuadrados de lados enteros, no necesariamente del mismo tamaño, sin que estos cuadrados se encimen y sin que sobresalgan del borde de la figura?



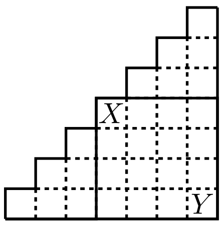
Solución:

Llamaremos construibles a dichos números n. Tomemos un n construible y fijémonos en los cuadritos marcados con X.



En total tenemos n cuadritos. Si consideramos un cuadrado de los que no se salen de la figura, éste puede cubrir a lo más un cuadrito de los marcados con X. Como sólo tenemos n cuadrados para cubrir la figura, concluimos que cada cuadrado ocupará uno y sólo uno de estos cuadritos (de los marcados con X).

Ahora nos fijamos en el cuadrito marcado con Y. El cuadrado que lo cubra, deberá también cubrir a un cuadrito marcado con X, y por lo tanto, este cuadrito marcado con X tiene que estar a la mitad de la escalera. Luego, n es impar.



Este cuadrado separa la escalera original en dos escaleras, cada una de $\frac{n-1}{2}$ escalones. Por lo tanto, $\frac{n-1}{2}$ es construible.

Continuando de esta forma, $\frac{n-1}{2}$ es impar y $\frac{\frac{n-1}{2}-1}{2}=\frac{n-3}{4}$ es construible, y así sucesivamente, hasta llegar al 1 que es el menor construible. Además, si m es construible entonces también lo es $2m+1$. Entonces concluimos que todos los números construibles son: $1, 3, 7, 15, \ldots$ es decir todos los números de la forma $\boxed{2^k-1 \text{ para } k\geq 1}$.

Nivel U

Para un real x se define $z(x)$ como el primer entero que se encuentra al ir de x hacia 0, por ejemplo, z de un entero es él mismo, $z(3.2)=3$ y $z(-5.4)=-5$.

Se colorean de azul 2015 puntos de coordenadas enteras en el plano. Si están coloreados de azul los puntos (a,b) y (c,d), se permite colorear de azul el punto

$$\left(z\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2+1}}\bullet c\right), z\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2+1}}\bullet d\right)\right)$$

Demostrar que no es posible colorear de azul una cantidad infinita de puntos.

Solución:

La primera observación es que la función z fija o disminuye el valor absoluto de cualquier real, es decir, $|z(x)|\leq|x|$. Esto se sigue de la definición de z. Si a un vector (x,y) se le aplica z en cada una de sus coordenadas, entonces se tiene

$$|(z(x),z(y))|^2 = z(x)^2+z(y)^2 \leq x^2+y^2 = |(x,y)|$$

es decir, aplicar la función z entrada a entrada en un vector no aumenta su norma.

Supongamos que de entre los puntos iniciales el que tiene mayor norma es (X,Y). Afirmamos que nunca obtendremos un punto con una norma mayor a la de (X,Y). Procedemos por inducción en la cantidad de pasos. El caso base (0 pasos) se sigue de la definición de (X,Y). Ahora, tomemos dos puntos pintados (a,b) y (c,d). Ya que la función z no aumenta las normas, el cuadrado de la norma del nuevo punto es a lo más

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2+1}\bullet c^2+\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2+1}\bullet d^2=\frac{c^2+d^2}{c^2+d^2+1}\bullet\left(a^2+b^2\right)<a^2+b^2\leq X^2+Y^2$$

Esto termina la inducción. Así, sólo podemos pintar puntos con coordenadas enteras que tengan norma menor o igual a $\sqrt{X^2+Y^2}$. Como de estos sólo hay una cantidad finita, el problema ha sido concluido.