Olimpiada Matemática Ecuatoriana

LISTA SEMANAL
Soluciones

Fecha:
2015/Oct/12

Nivel 1

Edgar quiere comprar chocolates. Si comprara 5 chocolates le sobrarían $10, mientras que para comprar 7 chocolates tendría que pedir prestado $22. Si se sabe que todos los chocolates cuestan lo mismo, ¿cuánto cuesta cada chocolate?

Solución:

Sea x el precio de cada chocolate y sea T el total de dinero que tiene Edgar.
Como nos dicen que si Edgar comprara 5 chocolates le sobrarían $10 entonces

$$T = 5x + 10 \qquad (1)$$

Luego nos dicen que si Edgar compra 7 chocolates tendría que pedir prestado $22 entonces

$$T = 7x - 22 \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2) se obtiene

$$5x + 10 = 7x - 22 \Rightarrow 10 + 22 = 7x - 5x \Rightarrow 32 = 2x \Rightarrow x = 16$$

Con lo que se puede concluir que cada chocolate cuesta $\boxed{\$16}$.

Nivel 2

Todos los números naturales de 7 cifras que contienen exactamente una vez los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y que no son múltiplos de 5, son ordenados de manera creciente. Hallar el número que ocupa el puesto 2015 en la lista.

Solución:

Existen en total 6! números con el primer dígito 1, pero 5! De ellos son divisibles para 5, entonces en total tendríamos $6! - 5! = 600$ números que comienzan con el dígito 1 y que no son divisibles para 5. Lo mismo ocurre con los números que empiezan con el dígito 2 y 3. Entonces tendríamos 1800 números.

Ahora consideremos los números que comienzan con 41. Análogamente, como en el caso anterior, podemos contar que hay $5! - 4! = 96$ números que comienzan con 41 y que no son divisibles para 5. Lo mismo ocurre con los números que empiezan con 42. Entonces habríamos contado hasta el número 1992.

Hay $4! - 3! = 18$ números que comienzan con 431, y tendríamos 2010 números. Hay $3! - 2! = 4$ números que empiezan con 4321, entonces tendríamos 2014 números, y el número que ocupa la posición 2015 es $\boxed{4325167}$.

Nivel 3

Hallar todos los pares de enteros positivos (m,n) tales que

$$(m+n)^2 \mid 4(mn+1)$$

Solución:

Sin pérdida de generalidad supongamos que $m \geq n$.

$$(m+n)^2 \mid 4(mn+1) \Rightarrow (m+n)^2 \leq 4(mn+1) \Rightarrow m^2+2mn+n^2 \leq 4mn+4 \Rightarrow m^2-2mn+n^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow (m-n)^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq m-n \leq 2$$

de donde se tienen 3 casos:

Caso 1: $m=n$

$$(2n)^2 \mid 4\left(n^2+1\right)=4n^2+4 \Rightarrow 4n^2 \mid 4n^2+4 \Rightarrow 4n^2 \mid 4 \Leftrightarrow n=1 \Rightarrow (m,n)=(1,1)$$

Caso 2: $m=n+1$

$$(2n+1)^2 \mid 4((n+1)n+1) \Rightarrow 4n^2+4n+1 \mid 4n^2+4n+4 \Rightarrow 4n^2+4n+1 \mid 3$$

y claramente esta divisibilidad no tiene solución en los enteros positivos.

Caso 3: $m=n+2$

$$(2n+2)^2 \mid 4((n+2)n+1) \Rightarrow 4n^2+8n+4 \mid 4n^2+8n+4$$

esto último se cumple para todo valor entero positivo, y considerando la simetría de la expresión, se tiene la familia de soluciones

$$(m,n)=(t,t+2);(t+2,t)$$

Finalmente todas las parejas que cumplen son

$$\boxed{(m,n)=(1,1);(t,t+2);(t+2,t) \quad ;\forall t \in \mathbb{Z}^+}$$

Nivel U

La sucesión $\{x_n\}$ cumple que $x_1=2$ y $x_{n+1}=\sqrt{x_n+\frac{1}{n}}$. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$.

Solución:

Primero se va a demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existe, para esto se demostrará que $x_n \geq 1$ para todo n entero positivo usando inducción.

Claramente $x_1=2\geq 1$. Ahora supongamos que $x_n \geq 1$, entonces

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n+\frac{1}{n}} \geq \sqrt{1+\frac{1}{n}} \geq \sqrt{1}=1$$

Con lo que se ha concluido la inducción.

Ahora se procederá a demostrar que $\{x_n\}$ es decreciente. Para esto basta ver que $x_{n+1} \leq x_n$, y se procederá nuevamente por inducción.

Para el caso base $x_2 = \sqrt{x_1 + \frac{1}{1}} = \sqrt{3} \leq 2 = x_1$. Ahora supongamos que $x_n \geq x_{n+1}$, entonces

$$x_n + \frac{1}{n} \geq x_{n+1} + \frac{1}{n} \geq x_{n+1} + \frac{1}{n+1} \geq 0$$

por lo que

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n + \frac{1}{n}} \geq \sqrt{x_{n+1} + \frac{1}{n+1}} = x_{n+2}$$

con lo que se ha concluido la inducción.

Por lo demostrado en los dos puntos anteriores se tiene que $\{x_n\}$ es convergente.

Sea $l = \lim_{n\to\infty} x_n$. Por la primera parte se tiene que $l \geq 1$, y además

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n + \frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{1}{n}\right)} = \sqrt{l}$$

De este modo se puede concluir que $l^2 = l$ por lo que $l = 0$ o $l = 1$, pero como $l \geq 1$ entonces $l = 1$ y de esta manera se ha demostrado lo que pedía el problema.