Olimpiada
Matemática
Ecuatoriana

LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Sep/21

Nivel 1

Considerar la secuencia oscilante 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, …
Determinar el término 2003º de la secuencia.

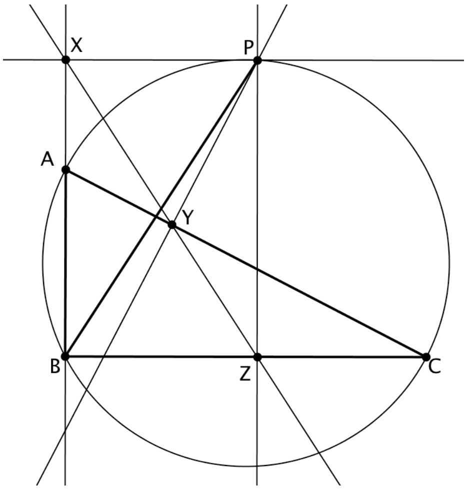
Solución:
Veamos que la secuencia es cíclica, es decir que se van repitiendo los números, en este caso el ciclo es 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2 que está formado por 8 números, de esta manera se ve la necesidad de determinar cuántas veces se repite completamente este ciclo hasta llegar al término 2003º.

Dividiendo 2003 para 8 podemos ver que $2003 = 8 \bullet 250 + 3$ entonces el ciclo ocurre 250 veces y luego faltan 3 términos para llegar al 2003º que serán 1, 2, 3, por lo que el término 2003º de la secuencia es el $\boxed{3}$.

Nivel 2

Sea ABC un triangulo con ángulo recto en B y sea P un punto sobre su circuncírculo. Sea X e Y los pies de las perpendiculares de P a los lados AB y AC. Demostrar que XY pasa por el punto medio de BP.

Solución:
Sea Z el pie de la perpendicular de P al lado BC.



Por la recta de Simson, se sabe que los puntos X, Y y Z son colineales.

Como $\measuredangle PXB = \measuredangle XBZ = \measuredangle BZP = 90^\circ$ entonces $BXPZ$ es un rectángulo, luego, la diagonal XZ (que es la misma que XY) biseca a la otra diagonal que es BP, con lo que se concluye la demostración.

Nivel 3

¿Cuántos subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ existen tales que la diferencia entre cualesquiera dos de sus elementos sea mayor o igual que 3?

Solución:

Tales subconjuntos tienen a lo más 4 elementos.

Hay un solo subconjunto con 4 elementos que es $\{1,4,7,10\}$.

Los subconjuntos con 3 elementos se pueden contar de la siguiente manera:
Los que empiezan con 1 y 4 luego pueden terminar con 7, 8, 9, 10.
Los que empiezan con 1 y 5 luego pueden terminar con 8, 9, 10.
Los que empiezan con 1 y 6 luego pueden terminar con 9, 10.
Los que empiezan con 1 y 7 luego pueden terminar con 10.
Los que empiezan con 2 y 5 luego pueden terminar con 8, 9, 10.
Los que empiezan con 2 y 6 luego pueden terminar con 9, 10.
Los que empiezan con 2 y 7 luego pueden terminar con 10.
Los que empiezan con 3 y 6 luego pueden terminar con 9, 10.
Los que empiezan con 3 y 7 luego pueden terminar con 10.
Los que empiezan con 4 y 7 luego pueden terminar con 10.
En total hay $(1+2+3+4)+(1+2+3)+(1+2)+(1)=10+6+3+1=20$

Los subconjuntos con 2 elementos son $\binom{10}{2}=45$, pero de ellos hay que dejar de contar los que no cumplan la condición del problema, que son 9 con elementos consecutivos y 8 que tienen elementos con diferencia 2, entonces hay $45-9-8=28$ subconjuntos de 2 elementos que cumplen la condición del problema.

Hay 10 subconjuntos de 1 elemento que así como el subconjunto vacío también cumplen la condición entonces hay un total de $1+20+28+10+1=\boxed{60}$ subconjuntos que cumplen con la condición del problema.

Nivel U

Se sabe que $\sum_{k>0}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$. Se define $f(n)=\sum_{0<k\leq n}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$.

Demostrar que existe un real $a>0$ tal que existe el límite

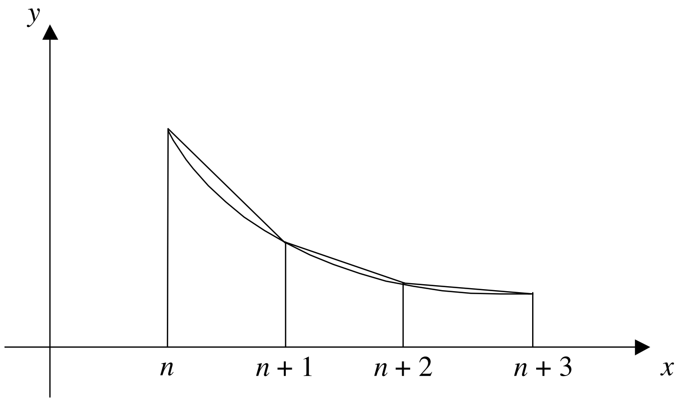
$$\lim_{n\to\infty}\left(f(n)-\frac{\pi^2}{6}+\frac{a}{n}\right)\bullet n^2$$

Calcular a de este límite.

Solución:

Se tiene que $\dfrac{\pi^2}{6}-f(n)=\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\dfrac{1}{(n+3)^2}+\ldots$

Se puede obtener una estimación para esta suma estimando el área debajo del gráfico de $y=\dfrac{1}{x^2}$, $x\geq n$ usando trapecios, como se muestra a continuación



El área exacta es $\displaystyle\int_n^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{n}$.

El área obtenida por medio de la aproximación, que es ligeramente mayor, es

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}\right)+\ldots=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\ldots$$

$$=\frac{1}{2n^2}+\frac{\pi^2}{6}-f(n)$$

de donde $\left(f(n)-\dfrac{\pi^2}{6}+\dfrac{1}{n}\right)n^2<\dfrac{1}{2}$

Así si $\boxed{a=1}$ se tendrá que el límite es igual a $\dfrac{1}{2}$. Para demostrar que el error es realmente pequeño, se debe estimar la diferencia entre áreas

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\int_n^{n+1}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2n^2(n+1)^2}<\frac{1}{2n^4}$$

Así se obtiene que

$$0<\frac{\pi^2}{6}-f(n)-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{(n+1)^4}+\ldots\right)<\frac{1}{2}\int_{n-1}^{\infty}\frac{1}{x^4}dx=\frac{1}{6(n-1)^3}$$

y con esto

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\bullet\frac{n^2}{(n-1)^3}<\left(f(n)-\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{n}\right)n^2<\frac{1}{2}$$

lo que confirma que el límite es igual a $\dfrac{1}{2}$.