Olimpiada Matemática Ecuatoriana

LISTA SEMANAL

Soluciones

Fecha:
2015/Sep/28

Nivel 1

Sean ABC y DEF triángulos rectángulos semejantes con hipotenusas $AC=2$ y $DF=10$ respectivamente. Calcula el valor de $AB \bullet DE + BC \bullet EF$.

Solución:

La razón de semejanza entre los triángulos ABC y DEF es $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

Luego $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{1}{5}$, de donde $DE=5\bullet AB$ y $EF=5\bullet BC$, por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras en el triangulo ABC, se obtiene

$$AB \bullet DE + BC \bullet EF = 5\left(AB^2+BC^2\right)=5\bullet 2^2=\boxed{20}$$

Nivel 2

Demostrar que la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1006}}+\frac{1}{\sqrt{2012-x}+\sqrt{1006}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2012-x}}$$

tiene 2013 soluciones enteras.

Solución:

Primero veamos que $0\le x\le 2012$ ya que los valores que están dentro de las raíces cuadradas deben ser valores no negativos.

A continuación se va a simplificar al máximo la expresión dada.

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1006}}+\frac{1}{\sqrt{2012-x}+\sqrt{1006}}=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{2012-x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1006}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{1006}\right)^2}+\frac{\sqrt{2012-x}-\sqrt{1006}}{\left(\sqrt{2012-x}\right)^2-\left(\sqrt{1006}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2012-x}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2012-x}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1006}}{x-1006}+\frac{\sqrt{2012-x}-\sqrt{1006}}{2012-x-1006}=\frac{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2012-x}\right)}{x-2012+x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1006}}{x-1006}+\frac{\sqrt{2012-x}-\sqrt{1006}}{1006-x}=\frac{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2012-x}\right)}{2x-2012}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1006}}{x-1006}-\frac{\sqrt{2012-x}-\sqrt{1006}}{x-1006}=\frac{2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2012-x}\right)}{2(x-1006)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1006}-\sqrt{2012-x}+\sqrt{1006}}{x-1006}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2012-x}}{x-1006}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2012-x}}{x-1006}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2012-x}}{x-1006}$$

Pero esto último corresponde a una identidad, y por esto, todo valor es solución de la ecuación, pero como $0 \le x \le 2012$ entonces se puede concluir fácilmente que hay 2013 soluciones enteras ($x \in \{0,1,2,\ldots,2012\}$).

Nivel 3

Determinar todas las funciones inyectivas $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ que cumplen
$$|f(x)-f(y)| \le |x-y|$$
para todo $x,y\in\mathbb{Z}$.

Solución:

La inecuación dada nos permite obtener que $|f(x+1)-f(x)| \le |(x+1)-x| = |1| = 1$ entonces $f(x+1)-f(x)\in\{-1,0,1\}$, pero como el problema indica que f debe ser inyectiva entonces $f(x+1)\neq f(x)$ con lo que $f(x+1)-f(x)\neq 0$, así
$$f(x+1)-f(x)\in\{-1,1\} \qquad ; \forall x\in\mathbb{Z}$$
Supongamos sin pérdida de generalidad que $f(1)-f(0)=1$, ya que si f cumple entonces $-f$ también cumplirá, veamos que la suposición implica que $f(0)=f(1)-1$.

Se tiene que $f(2)-f(1)=\pm1$, si $f(2)-f(1)=-1$ entonces $f(2)=f(1)-1=f(0)$ con lo que $f(2)=f(0)$, lo que es una contradicción ya que f es inyectiva, entonces $f(2)-f(1)=1$.

Se procederá a demostrar, por inducción, que $f(n+1)-f(n)=1$ para todo entero positivo n.

El caso base con $n=1$ ya se ha demostrado.

Supongamos que $f(k)-f(k-1)=1$.

Se tiene que $f(k+1)-f(k)=\pm1$, si $f(k+1)-f(k)=-1$ entonces $f(k+1)=f(k)-1$ pero por la suposición se tiene que $f(k)-1=f(k-1)$ entonces $f(k+1)=f(k-1)$ lo que no es cierto ya que f es inyectiva, entonces $f(k+1)-f(k)=1$, y de esta manera se termina la demostración.

Como $f(n)-f(n-1)=1$ entonces $f(n)=f(n-1)+1$ de donde $f(n)=f(n-2)+2$ y así sucesivamente hasta obtener $f(n)=f(0)+n$ para todo entero positivo n.

Análogamente se tiene que $f(-n)=f(0)-n$ para todo entero positivo n, con lo que se puede concluir que $\boxed{f(x)=\pm x+k \text{ para todo entero } x\text{, con } k \text{ un entero fijo}}$.

Es fácil comprobar que todas estas funciones cumplen con las condiciones del problema.

<u>Nivel U</u>
Evaluar

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}\,dx$$

Solución:

Como $e^{x^n} \geq 1$ para todo $x \in [0,1]$ entonces $\int_0^1 e^{x^n}\,dx \geq 1$. (1)

Por otro lado veamos que $e^t \leq 1+3t$ para todo $t \in [0,1]$ con lo que

$$\int_0^1 e^{x^n}\,dx \leq \int_0^1 \left(1+3x^n\right)dx = 1+\frac{3}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}\,dx \leq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n+1}\right) = 1 \qquad (2)$$

Por (1) y (2) se tiene $1 \leq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}\,dx \leq 1$ con lo que $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}\,dx = \boxed{1}$.